

Вариант 1 (олимпиада «Ломоносов-2007»)

1. Вычислите $(\sin \alpha - \cos \alpha)(\sin \beta - \cos \beta)$, если $\sin(\alpha + \beta) = 0,8$ и $\cos(\alpha - \beta) = 0,3$.
2. Решите уравнение

$$\sqrt{2^{(x^2)}} = \left(2^{\sqrt[5]{x}}\right)^5.$$

3. Какие значения может принимать выражение

$$\log_{b_{11}b_{50}}(b_1b_2 \dots b_{60}),$$

где b_1, b_2, \dots — геометрическая прогрессия?

4. Решите неравенство

$$\frac{\sqrt{8-x} - |2x-1|}{\sqrt{x+7} - |2x-1|} \leq 1.$$

5. На стороне AB треугольника ABC взята такая точка D , что окружность, проходящая через точки A, C и D , касается прямой BC . Найдите AD , если $AC = 9$, $BC = 12$ и $CD = 6$.

6. Натуральные числа a, b и c таковы, что $\text{НОК}(a, b) = 60$ и $\text{НОК}(a, c) = 270$ ($\text{НОК}(x, y)$ — наименьшее общее кратное чисел x и y). Найдите $\text{НОК}(b, c)$.

7. Определите, под каким углом видно из начала координат (т.е. внутри какого наименьшего угла с вершиной в точке $(0, 0)$ помещается) множество, заданное на координатной плоскости неравенством

$$14x^2 + xy + y^2 + 14x + 2y + 4 < 0.$$

8. Грани двугранного угла пересекают боковую поверхность цилиндра радиусом 5, образуя с его осью углы в 70° и 80° , а ребро двугранного угла перпендикулярно этой оси и удалено от нее на расстояние 11. Найдите объем части цилиндра, расположенной внутри двугранного угла.

9. Найдите все значения $x \in (0; \pi]$, удовлетворяющие уравнению

$$|\operatorname{tg} x \operatorname{tg} 2x \operatorname{tg} 3x| + |\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} 2x| = \operatorname{tg} 3x.$$

10. В течение четверти учитель по пению ставил детям оценки «1», «2», «3», «4» и «5». Среднее арифметическое всех оценок Вовочки оказалось равным в точности 3,5. И тогда, по предложению Вовочки, учитель заменил одну его оценку «4» парой оценок «3» и «5». Докажите, что от этого

средняя оценка Вовочки по пению увеличилась. Найдите наибольшее возможное ее значение после такой замены:

1. одной оценки «4»;
2. всех его оценок «4».

Вариант 2 (механико-математический факультет)

1. Учитель назвал Пете натуральное число и попросил найти сумму его логарифмов по основаниям 3 и 75. Однако Петя по ошибке не сложил эти логарифмы, а перемножил их, получив неверный ответ, который оказался вдвое меньше верного. Какое число назвал ему учитель?

2. Графики функций

$$f(x) = 2x^2 - 2x - 1 \text{ и } g(x) = -5x^2 + 2x + 3$$

пересекаются в двух точках. Найдите коэффициенты a и b в уравнении прямой $y = ax + b$, проходящей через те же точки.

3. Решите уравнение

$$3 \cos x |3 \sin x + \cos x| = \sin x |\cos x - 3 \sin x|.$$

4. Точки A , B и C лежат на окружности радиуса 2 с центром O , а точка K — на прямой, касающейся этой окружности в точке B , причем $\angle AKC = 46^\circ$, а длины отрезков AK , BK , CK образуют возрастающую геометрическую прогрессию (в указанном порядке). Найдите угол AKO и расстояние между точками A и C . Какой из углов больше: ACK или AOK ?

5. Найдите наибольшее значение выражения

$$\sqrt{(x-1)(y-x)} + \sqrt{(7-y)(1-x)} + \sqrt{(x-y)(y-7)}$$

при $x \in [-2; 3]$ и $y \in [0; 11]$.

6. Два конуса имеют общую вершину и единственную общую образующую, которая составляет с их осями углы в 30° и 45° . Двугранный угол расположен так, что каждая его грань касается каждого из конусов по разным образующим. Найдите величину этого угла.

Вариант 3 (факультет вычислительной математики и кибернетики, олимпиада
«Абитуриент-2007», апрель)

1. Решите уравнение

$$\frac{-4 \cos^3 x + 2 \sin 2x + \cos x}{\sin x - 1} = 0.$$

2. Решите неравенство

$$3^{\frac{x+3}{5x-2}} - 4 \geq 5 \cdot 3^{\frac{9x-7}{5x-2}}.$$

3. В двух одинаковых сосудах объемом по 30 л каждый содержится всего 30 л спирта. Первый сосуд доливают доверху водой и полученной смесью дополняют второй сосуд, затем из второго сосуда отливают в первый 12 л новой смеси. Сколько спирта было первоначально в каждом сосуде, если во втором сосуде оказалось на 2 л спирта меньше, чем в первом?

4. В прямоугольном равнобедренном треугольнике ABC с прямым углом C проведены биссектриса AM и медиана BN , пересекающиеся в точке K . Найдите площадь данного треугольника, если $AK = 2 + \sqrt{2}$.

5. Найдите минимальное и максимальное значения функции

$$y = \sqrt{\sin x} + \sqrt{\sin \left(x + \frac{5\pi}{6} \right)}.$$

6. Некоторая прямая касается двух сфер, расстояние между центрами которых равно 5. Первой сферы радиуса $\sqrt{3}$ с центром в точке O_1 эта прямая касается в точке K , а второй сферы радиуса 2 с центром в точке O_2 эта прямая касается в точке L , причем $KL = 2\sqrt{6}$. Чему равен двугранный угол, ребром которого является прямая KL , одна из граней содержит точку O_1 , а другая — точку O_2 ?

Вариант 4 (факультет вычислительной математики и кибернетики)

1. Найдите все решения уравнения

$$2 \sin \left(x + \frac{7\pi}{25} \right) \sin \left(3x + \frac{18\pi}{25} \right) = \cos 4x + 2^{\cos \frac{2\pi}{3}},$$

принадлежащие отрезку $\left[-\frac{\pi}{10}; \frac{4\pi}{5} \right]$.

2. Решите неравенство

$$\log_{x+2}(2-x) \geq \frac{|\log_5(2x+3) - 1|}{\log_5(x+2)}.$$

3. В треугольнике ABC точка D является основанием высоты, опущенной из точки A на сторону BC . Окружность диаметра $2\sqrt{3}$ проходит через точки B и D и касается внешним образом окружности, описанной около треугольника ACD . Известно, что $AC = 4\sqrt{3}$, а величина угла ABC равна 30° . Найдите длину стороны BC .

4. Найдите все пары целых чисел $(x; y)$, удовлетворяющие системе неравенств

$$\begin{cases} x - y \leq -25, \\ x^2 - y \leq 8, \\ 4x + y \leq 1. \end{cases}$$

5. Дана треугольная призма $ABCA_1B_1C_1$ ($AA_1 \parallel BB_1 \parallel CC_1$). На ребре CC_1 выбрана точка D . Сечение, проходящее через точки A , B_1 и D , делит призму на два многогранника, $ABCDB_1$ и $B_1AA_1C_1D$, отношение объемов которых равно $13 : 17$. В каком отношении точка D делит ребро CC_1 ?

6. Какие значения может принимать $\sin(\alpha + \beta + \gamma)$, если при этих α, β, γ многочлен от x

$$x^4 + 2^{3 \sin \alpha} x^2 + x \sqrt{2^{1 - \sin \beta} - \cos \gamma} + \sin^2 \beta + \cos^2 \gamma$$

является квадратом некоторого многочлена относительно x ?

Вариант 5 (физический факультет)

1. Решите уравнение

$$\frac{\sin 5x - \sin 3x}{2 \sin x} = 1.$$

2. Решите уравнение

$$\frac{(\sqrt{3})^{2x} + 5 \cdot 3^{2-x} - 14}{49 - 7^x} = 0.$$

3. Решите уравнение

$$\sqrt{x-2} - \sqrt{2x+2} = \sqrt{2x-5} - \sqrt{3x-1}.$$

4. Окружность радиуса 2, вписанная в $\triangle KLM$, касается стороны LM в точке N . Отрезок KN является медианой треугольника и $KN = 8$. Найдите площадь $\triangle KLM$.

5. Решите неравенство

$$\log_4(x^2 - 4)^2 + \log_2 \frac{x-1}{x^2-4} > 0.$$

6. В $\triangle KLM$ через точку N высоты KN проведены прямые, перпендикулярные сторонам KL и KM и пересекающие их в точках A и B соответственно. Отрезок AB равен a , а радиус описанной около $\triangle KLM$ окружности равен R . Найдите площадь $\triangle KLM$.

7. Для каждого значения a из промежутка $(-3; 0)$ найдите число различных решений уравнения

$$(2x^2 - 5ax + 2a^2)\sqrt{x - \frac{2}{a}} = 0.$$

8. Сфера радиуса $(1/2)\sqrt{17}$ касается всех сторон правильного $\triangle LMN$. Точка S такова, что плоскости SLM , SMN и SNL касаются сферы. Расстояние от точки S до плоскости LMN равно

8. Найдите объем пирамиды $SLMN$.

Вариант 6 (факультеты: химический, наук о материалах, биологический, фундаментальной медицины, биоинженерии и биоинформатики, географический, психологии)

1. Решите уравнение

$$(x^2 - 7|x| + 6)\sqrt{4x + 23} = 0.$$

2. Решите неравенство

$$\frac{x^2 + 4x + 4}{2x + 12} \leq 1 - \frac{\sqrt{x^2 + 8x + 16}}{x + 4}.$$

3. В прямоугольном треугольнике DEF на гипотенузу опущены медиана DM и высота DQ . Известно, что $MD = \frac{\sqrt{17}}{2}$ и $\sin \angle DMQ = \frac{8}{17}$. Найдите катеты треугольника DEF .

4. Положительные числа b_1, b_2, b_3, b_4, b_5 образуют геометрическую прогрессию, а числа $b_5, 6b_3, 27b_1$ — арифметическую. Найдите знаменатель прогрессии b_1, b_2, b_3, b_4, b_5 .

5. Прямая l_1 проходит через точки $(-3; 2)$ и $(1; 1)$ координатной плоскости. Прямая l_2 проходит через точку $(-5; 4)$ и перпендикулярна прямой l_1 . Найдите координаты точки пересечения прямых l_1 и l_2 .

6. Решите уравнение

$$\log_{\cos x}(\cos^2 x + \sin^2 x) - 2 \sin^2 x + 5 \sin 2x = 0.$$

7. За 2005 год число книг в фонде библиотеки поселка увеличилось на 0,4%, а за 2006 год — на 0,8%, оставшись при этом меньше 50 тысяч. На сколько книг увеличился фонд библиотеки поселка за 2006 год?

8. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых среди корней уравнения

$$ax^2 + (a + 4)x + a + 1 = 0$$

имеется ровно один отрицательный.