Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова

Вступительное испытание по математике 2006 года

Вариант 1 (факультет вычислительной математики и кибернетики, олимпиада «Абитуриент-2006»)

1. Найдите все решения системы уравнений

$$\begin{cases} (x+2y)^{x-y} = 25, \\ 2\log_3(x+2y) + x - y = 4. \end{cases}$$

2. Решите неравенство

$$\sqrt{\frac{x^2-22x+121}{x^2-24x+140}} \geqslant 50x - 2x^2 - 309.$$

3. В треугольнике ABC проведена медиана AM. Известно, что $AM : BC = \sqrt{13} : 2$, а угол BAC равен 30°. Найдите углы ABC и ACB, считая, что угол ABC не меньше угла ACB.

4. Найдите все решения неравенства, удовлетворяюшие условию $\frac{\pi}{8} \leqslant x < \frac{\pi}{2}$

$$\operatorname{tg} x > \frac{9 - 3\cos 2x}{3\sin 2x - 2}.$$

5. Основанием четырехугольной пирамиды $SABCD$ является трапеция $ABCD$, у которой $AD \parallel BC$. На ребре SC выбрана точка K так, что $CK : KS = 2 : 5$. Плоскость, проходящая через точки A, B и K, пересекает ребро SD в точке L. Известно, что $V_{SABKL} : V_{SABCD} = 95 : 189$ (V_{SABKL} и V_{SABCD} — объемы пирамид $SABKL$ и $SABCD$ соответственно). Найдите отношение длин оснований трапеции $ABCD$.

6. Найдите все значения параметра , при которых уравнение имеет решения

$$2(1+\cos 2x)^2|\sin(2x+a)| = 2\cos 2x - 2\cos(4x+2a) - \cos(6x+2a) - \cos(2x+2a).$$

Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова

Вступительное испытание по математике 2006 года

Вариант 2 (факультет вычислительной математики и кибернетики)

1. Из города A в город B в 6 часов утра выехал грузовой автомобиль. Шесть часов спустя из города B в город A по той же дороге выехал ему навстречу легковой автомобиль. Автомобили движутся с постоянными скоростями. По предварительной договоренности они одновременно приехали в поселок C, расположенный на дороге между A и B. Разгрузка и оформление документов длились пять часов. Затем грузовой и легковой автомобили продолжили каждый свой путь. Легковой и грузовой автомобили прибыли, соответственно, в города A и B одновременно в 23 часа того же дня. Найдите время прибытия автомобилей в населенный пункт C.

2. Решите уравнение

$$\log_{\frac{13-|2x-1|}{12}}(\sin 2x - 2\sin x + 1) = \log_{\frac{13-|2x-1|}{12}}(\cos x).$$

3. Решите неравенство

$$11\sqrt{2x - \sqrt{48 - 144}} > 2x - 12.$$

4. В параллелограмме $ABCD$ проведена диагональ AC. Точка O является центром окружности, вписанной в треугольник ABC. Расстояния от точки O до точки A и до прямых AD и AC равны 10, 8 и 6 соответственно. Найдите площадь параллелограмма $ABCD$.

5. При каждом значении параметра d решите уравнение

$$\sqrt{x^2 - y^2 - dx + 3dy - 2d^2} + \sqrt{x - y + d}\cdot\sqrt{4 - 2x + d} +$$
$$+\sqrt{-2x^2 - 2xy + (5d+4)x + (d+4)y - 2d^2 - 8d} = 4$$

6. Две касающиеся друг друга сферы вписаны в двугранный угол. Первая сфера касается граней этого двугранного угла в точках A и B соответственно. Вторая сфера касается одной из граней этого двугранного угла в точке C. Точки A и C лежат в разных гранях. Первая сфера пересекает отрезок AC в точке K, отличной от A, а вторая сфера пересекает тот же отрезок в точке L, отличной от C. Длина отрезка KL в 7 раз меньше длины отрезка AC. Найдите длину отрезка AC, если известно, что расстояние между точками B и C равно $2\sqrt{7}$.