Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова

Вступительное испытание по математике 2003 года

Вариант 1 (механико-математический факультет, олимпиада «Абитуриент-2003», март)

1. Найдите первый член целочисленной арифметической прогрессии, у которой сумма первых шести членов отличается от суммы следующих шести членов менее чем на 450, а сумма первых пяти членов превышает более чем на 5 сумму любого другого набора различных членов этой прогрессии.

2. Решите неравенство

$$\sqrt{\frac{4x^7-10x^3}{4x-x^3-3}} \leqslant x^3.$$

3. На продолжении биссектрисы AL треугольника ABC за точку A взята такая точка D, что $AD = 10$ и $\angle BDC = \angle BAL = 60°$. Найдите площадь треугольника ABC. Какова наименьшая площадь треугольника BCD при данных условиях?

4. Найдите площадь фигуры, заданной на координатной плоскости системой

$$\begin{cases} |y+\log_2 x| + |y+1-2^{x-1}| = \left|2y-2^{x-1}+1+\log_2 x\right|, \\ |x|+|y+1|+|y-1| = x+2. \end{cases}$$

5. Точка O расположена в сечении $AA'C'C$ прямоугольного параллелепипеда $ABCDA'B'C'D'$ размером $2\times 6\times 9$ так, что

$$\angle OAB + \angle OAD + \angle OAA' = 180°.$$

Сфера с центром в точке O касается плоскостей $A'B'C'$, $AA'B$ и не имеет общих точек с плоскостью $AA'D$. Найдите расстояние от точки O до этой плоскости.

6. Найдите все значения α, при каждом из которых расстояние между любыми двумя соседними корнями уравнения

$$\cos\alpha\cos 3x - \sin 3\alpha\cos x + 2\sin 2\alpha\cos 2x = 3\sin\alpha - \cos 3x$$

не превосходит $\frac{\pi}{3}$.

Вариант 2 (механико-математический факультет)

1. Решите неравенство

$$5\sqrt{\frac{\sqrt{x+4}+\sqrt{x+3}}{\sqrt{x+4}-\sqrt{x+3}}}+4\sqrt{\frac{\sqrt{x+4}-\sqrt{x+3}}{\sqrt{x+4}+\sqrt{x+3}}}\leqslant 9\sqrt{x+4}.$$

2. Решите уравнение

$$\left|5^{\log_x 122}-x^{\log_5 x}+614\right|=636-5^{\log_x 122}-x^{\log_5 x}.$$

3. Первый член конечной геометрической прогрессии с целочисленным знаменателем меньше последнего, но не более чем на 17, а сумма ее членов со второго по последний не меньше 26. Найдите знаменатель прогрессии.

4. Через вершины A и B треугольника ABC проведена окружность, касающаяся прямой BC, а через вершины B и C — другая окружность, касающаяся прямой AB. Продолжение общей хорды BD этих окружностей пересекает отрезок AC в точке E, а продолжение хорды AD одной окружности пересекает другую окружность в точке F. Найдите отношение $AE:EC$, если $AB=5$ и $BC=9$. Сравните площади треугольников ABC и ABF.

5. Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$\sin\arccos(5x)=a+\arcsin\sin(7x-3)$$

имеет единственное решение.

6. Высота AH тетраэдра $ABCD$ пересекается с его высотой BE, но не лежит в одной плоскости ни с одной из других его высот. На отрезке $HE=4$ взята точка O, равноудаленная от граней тетраэдра, образующих двугранный угол в 30° при ребре $CD=5$. Найдите площадь сечения тетраэдра, проходящего через точку O и являющегося прямоугольником.

Вариант 3 (факультет вычислительной математики и кибернетики, олимпиада «Абитуриент-2003», апрель)

1. Сумма первых тридцати членов геометрической прогрессии с ненулевым первым членом и ненулевым знаменателем равна удвоенной сумме ее первых десяти членов. Найдите знаменатель этой прогрессии.

2. В равнобедренном треугольнике ABC ($AB = BC$) отношение расстояний от центра вписанной в этот треугольник окружности до вершин углов B и C соответственно равно k. Найдите углы треугольника ABC. Каковы возможные значения k?

3. Найдите все решения системы неравенств

$$\begin{cases} \sqrt{-\sin x} \leqslant \sqrt{\cos^3 x + \sin^2 x}, \\ \dfrac{\pi}{4} < \left| x + \dfrac{\pi}{2} \right| \leqslant 2\pi. \end{cases}$$

4. В прямоугольном параллелепипеде $KLMNK_1L_1M_1N_1$ среди всех сечений, проходящих через точки L, N_1 и произвольную точку A, лежащую на ребре L_1K_1, выбирается сечение наименьшей площади. Найдите диагонали этого сечения, если известно, что $KK_1 = a$, $K_1N_1 = b$ и $LK_1 = d$.

5. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система

$$\begin{cases} 2^{3x^2+2y^2+8x-4y+8} + 2^{x^2+4y+5} \leqslant 33 \cdot 2^{2x^2+y^2+4x+4}, \\ x^2 + y^2 - 8x + 8y = a \end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение, но среди этих решений нет удовлетворяющих условию $x + y = 0$.

6. Решите неравенство

$$\arcsin \sin x + 3 \arccos \geqslant 3x - 18.$$

Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова

Вступительное испытание по математике 2003 года

Вариант 4 (факультет вычислительной математики и кибернетики)

1. Решите неравенство

$$\log_{\left(\frac{3-x}{2}\right)}\left(\frac{6}{x+1}\right) \geqslant -1.$$

2. Решите уравнение

$$\sqrt{\sin x \sin 3x} = \cos x.$$

3. Найдите множество значений функции

$$y = \sqrt{x^2 - 3x + 2} - x.$$

4. В правильную четырехугольную пирамиду $SABCD$ вписана сфера радиуса $2\sqrt{6}$. Через точку касания этой сферы с боковой гранью SAB параллельно прямой AB проведена секущая плоскость, проходящая через ближайшую к вершине S точку сферы. Известно, что $AB = 12\sqrt{2}$. Найдите площадь сечения пирамиды этой плоскостью.

5. Найдите все значения параметра α, при каждом из которых система неравенств

$$\begin{cases} 4^x - 2^{x+y} \leqslant \dfrac{108\alpha - 161}{2\alpha - 3}, \\ 5 \cdot 2^{x+y} - 9 \cdot 4^y \geqslant 54 \end{cases}$$

имеет решение.

6. Дан параллелограмм $ABCD$, у которого $AB = 3$, $AD = \sqrt{3}+1$ и $\angle BAD = 60°$. На стороне AB взята такая точка K, что $AK : KB = 2 : 1$. Через точку K параллельно AD проведена прямая. На этой прямой внутри параллелограмма выбрана точка L, а на стороне AD выбрана точка M так, что $AM = KL$. Прямые BM и CL пересекаются в точке N. Найдите величину угла BKN.

Вариант 5 (физический факультет, олимпиада «Абитуриент-2003», март)

1. Решите уравнение

$$\cos 3x - 2\sin 2x - \cos x - \sin x - 1 = 0.$$

2. Решите неравенство

$$7\log_3(2+x)^8 < 8\log_2(-x+1)^7 \cdot \log_3 2.$$

3. Решите неравенство

$$(4^x - 2\cdot 2^x - 3)\log_2 x - 3 \geqslant 4^{\frac{x+1}{2}} - 4^x.$$

4. В треугольнике ABC $AB = BC$, $AC = 4\sqrt{3}$, радиус вписанной окружности равен 3. Прямая AE пересекает высоту BD в точке E, а вписанную окружность — в точках M и N (M лежит между A и E), $ED = 2$. Найдите EN.

5. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{17}{2x^2+3y} + \dfrac{12}{3x^2-2y} = 3, \\ \dfrac{6}{3x^2-2y} + \dfrac{34}{2x^2+3y} = 3 \end{cases}$$

и изобразите на координатной плоскости Oxy ее решения.

6. Площадь треугольника равна $6\sqrt{6}$, периметр его равен 18, расстояние от центра вписанной окружности до одной из вершин равно $2\sqrt{42}/3$. Найдите наименьшую сторону треугольника.

7. Для каждого допустимого значения a в уравнении

$$\sqrt{x} + \sqrt{\sqrt{a} - x} = a$$

1) найдите число различных решений уравнения;

2) найдите эти решения.

8. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ ($AA_1 \,||\, BB_1 \,||\, CC_1$), объем которой равен 4, проведено сечение плоскостью AC_1B. В пирамиду $C_1AA_1B_1B$ вписан шар. Найдите:

1) площадь сечения AC_1B;

2) радиус сферы, описанной около данной призмы.

Вариант 6 (физический факультет)

1. Решите уравнение

$$\operatorname{tg}^2 x - 6\cos 2x = 6.$$

2. Решите неравенство

$$|x^2 + 3x| + x^2 - 2 \geqslant 0.$$

3. Решите неравенство

$$\log_{25}(5^x - 1) \cdot \log_5(5^{x+2} - 25) < 4.$$

4. В трапеции $KLMN$ ($LM \,||\, KN$) LA — биссектриса $\angle KLM$, точка A — середина отрезка MN, средняя линия равна $\sqrt{5}$, $KA = 4$. Найдите LA.

5. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x-y} = 9 - |x+2y|, \\ x(x+4y-2) + y(4y+2) = 41. \end{cases}$$

6. В $\triangle KLM$ радиус описанной окружности равен R, $\angle K = \alpha$, точка O — центр окружности, вписанной в этот треугольник. Прямая KO пересекает окружность, описанную около $\triangle KLM$, в точке N. Найдите ON.

7. Для каждого значения a решите неравенство

$$\frac{x^2 \cdot 2^{|2a-1|} - 2x + 1}{x^2 - (a-2)x - 2a} > 0.$$

8. В пирамиде $SLMN$ даны ребра: $LM = 5$, $MN = 9$, $NL = 10$. Сфера радиуса $\frac{5}{4\sqrt{14}}$ касается плоскости основания LMN и боковых ребер пирамиды. Точки касания делят эти ребра в равных отношениях, считая от вершины S. Найдите объем пирамиды.