

Вариант 1 (факультет вычислительной математики и кибернетики, апрель)

1. Найдите площадь фигуры, заданной на координатной плоскости Oxy условиями

$$\begin{cases} 3y + x \geq -5, \\ 6\sqrt{y+1} \leq 6 - 4y, \\ x \leq 0. \end{cases}$$

2. Решите неравенство

$$|6 - \log_2(4x^2 - 20x + 25)| \cdot \log_{5-2x} 32 \leq 5.$$

3. Даны две окружности. Первая из них вписана в треугольник ABC , вторая касается стороны AC и продолжений сторон AB и BC . Известно, что эти окружности касаются друг друга, сумма кубов их радиусов равна 152, а угол BAC равен $\arccos\left(\frac{1}{4}\right)$. Найдите радиус окружности, описанной вокруг треугольника ABC .

4. Найдите $\operatorname{tg} |x|$, если известно, что

$$(5 \sin x + 3 \cos x + \sqrt{2}) \cdot (\sqrt{11} - 3\sqrt{\sin |x|}) = 0.$$

5. При каких значениях параметра a система имеет наибольшее число решений

$$\begin{cases} \sin(2\pi\sqrt{a^2 - x^2}) = 0, \\ 2 \cdot 3^{|ax|} + 3^{2-|ax|} \leq 19. \end{cases}$$

6. Рассматриваются всевозможные параллелепипеды с четырьмя ребрами длины 4 и остальными ребрами длины 3, в которые можно вписать шар. Найдите максимальное значение радиуса такого шара.

Вариант 2 (факультет вычислительной математики и кибернетики, апрель)

1. Найдите площадь фигуры, заданной на координатной плоскости Oxy условиями

$$\begin{cases} 3y + 2x \leq 8, \\ \sqrt{x^2 + 7x - 8} \leq x + 2, \\ 3y + 4 \geq x. \end{cases}$$

2. Решите неравенство

$$|\log_3(4x^2 - 12x + 9) - 3| \cdot \log_{3-2x} \left(\frac{1}{9} \right) \geq -2.$$

3. Даны две окружности. Первая из них вписана в треугольник ABC , вторая касается стороны AC и продолжений сторон AB и BC . Известно, что эти окружности касаются друг друга, сумма квадратов их радиусов равна 45, а угол ABC равен $\arccos \left(\frac{7}{9} \right)$. Найдите длину медианы AD треугольника ABC .

4. Найдите $\operatorname{ctg} |x|$, если известно, что

$$(5 \cos x + 7 \sin x + \sqrt{2}) \cdot (\sqrt{2} - \sqrt{\sin |x|}) = 0.$$

5. При каких значениях параметра a система имеет наибольшее число решений?

$$\begin{cases} \cos(2\pi\sqrt{a^2 - x^2}) = 0, \\ 8 \cdot 9^{|ax|} - 22 \cdot 6^{|ax|} + 9 \cdot 2^{2|ax|} \leq 0. \end{cases}$$

6. Рассматриваются всевозможные параллелепипеды с четырьмя ребрами длины 5 и остальными ребрами длины 4, в которые можно вписать шар. Найдите максимальное значение радиуса такого шара.

Вариант 3 (факультет вычислительной математики и кибернетики, июль, отделение специалистов)

1. При каких значениях параметра b уравнение имеет бесконечно много корней

$$b^4x + b^2 + (2 + \sqrt{2})b + 2\sqrt{2} = b^2(b + \sqrt{2}) + 4x.$$

2. Решите неравенство

$$2 \cos(\arcsin x) - \sin\left(\frac{1}{2} \arccos x\right) \leq 0.$$

3. Дан прямоугольный параллелепипед $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$, у которого $AD = 6$, $AB = 3$ и $AA_1 = 2$. Найдите угол между прямой AC_1 и прямой, проходящей через середины ребер AA_1 и $B_1 C_1$.

4. Из пункта A в пункт B в 8 часов утра вышел пешеход. Спустя два часа из пункта A вслед за пешеходом по той же дороге выехал велосипедист и мотоциклист. Известно, что скорость мотоциклиста в три раза больше скорости велосипедиста. Не позднее чем через 15 минут после своего выезда из пункта A мотоциклист обогнал пешехода и продолжил путь в пункт B . Велосипедист пешехода спустя не менее 45 минут после обгона пешехода мотоциклистом. Пешеход прибыл в пункт B в 14 часов того же дня. Найдите время прибытия мотоциклиста в пункт B .

5. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{13 \cos x + 98 \sin y} - \sqrt{13 \cos x + 28 \sin y} = 4, \\ 2\sqrt{13 \cos x + 28 \sin y} - \sqrt{70 \sin x + 8} = 2. \end{cases}$$

6. Биссектриса угла A треугольника ABC пересекает сторону BC в точке D . Окружность радиуса 35, центр которой лежит на прямой BC , проходит через точки A и D . Известно, что $AB^2 - AC^2 = 216$, а площадь треугольника ABC равна $90\sqrt{3}$. Найдите радиус окружности, описанной около треугольника ABC .

Вариант 4 (факультет вычислительной математики и кибернетики, июль, отделение специалистов)

1. При каких значениях параметра b уравнение имеет бесконечно много корней

$$|a|(a^2 + 2)x + a^2(a + \sqrt{5}) = \sqrt{5}a^2x + a^2 + 6\sqrt{6} + 2\sqrt{5}x + (6 + \sqrt{5})a.$$

2. Решите неравенство

$$2 \sin(2 \arccos x) - 3 \sin(\arccos x) \geq 0.$$

3. Дан прямоугольный параллелепипед $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$, у которого $AD = 8$, $AB = 3$ и $AA_1 = 4$. Найдите угол между прямой $B_1 D$ и прямой, проходящей через середины ребер AA_1 и $B_1 C_1$.

4. Из пункта A в пункт B в 6 часов утра вышел товарный поезд. В этот же момент из пункта B в пункт A вышли пассажирский и скорый поезда. Все поезда следуют с постоянными скоростями без остановок. Известно, что скорость пассажирского поезда составляет три четверти от скорости скорого поезда. Товарный поезд встретил скорый поезд не позднее 9 часов 20 минут утра и прибыл в пункт B в 16 часов того же дня. Известно, что между моментами встречи товарного поезда со скорым и пассажирскими поездами прошло не менее 40 минут. Найдите время прибытия пассажирского поезда в пункт A .

5. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{15 \sin x + 6} + \sqrt{21 \cos y - 15 \sin x} = 5, \\ \sqrt{21 \cos y + 2} - 2\sqrt{21 \cos y - 15 \sin x} = 7. \end{cases}$$

6. Биссектриса угла A треугольника ABC пересекает сторону BC в точке D . Точка E лежит на прямой BC , причем угол DAE — прямой. Известно, что $AB^2 - AC^2 = 640$, $DE = 198$, а радиус окружности, описанной около треугольника ABC , равен $66\sqrt{2}$. Найдите площадь треугольника ABC .

Вариант 5 (факультет вычислительной математики и кибернетики, июль, отделение бакалавров)

1. Решите уравнение

$$\sin 2x - 7 \sin x = 0.$$

2. При каких значениях параметра b уравнение не имеет корней

$$9x + b^2 - (2 - \sqrt{3})b - 2\sqrt{3} = b^4 x - b^2(b + \sqrt{3}).$$

3. Решите неравенство

$$3^{x+2} - 7 \cdot 2^{x+2} \leq 3^x - 2^x.$$

4. Решите неравенство

$$\sin(\arccos x) - \sqrt{3} \cdot \cos\left(\frac{1}{2} \arccos x\right) \leq 0.$$

5. Дан прямоугольный параллелепипед $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$, у которого $AD = 4$, $AB = 5$ и $AA_1 = 6$. Найдите угол между прямой AC_1 и прямой, проходящей через середины ребер AA_1 и $B_1 C_1$.

6. Из пункта A в пункт B в 10 часов утра стартовал первый бегун. Спустя 30 минут из пункта A вслед за первым бегуном по тому же маршруту в пункт B одновременно стартовали еще два бегуна. Известно, что скорости второго и третьего бегунов относятся как 5 : 6. Не позднее чем через час после своего старта из пункта A третий бегун обогнал первого. Второй бегун обогнал первого спустя не менее часа после обгона первого бегуна третьим. Первый бегун финишировал в пункте B в 13 часов того же дня. Найдите время финиша в пункте B третьего бегуна.

7. Биссектриса угла A треугольника ABC пересекает сторону BC в точке D . Окружность радиуса 56, центр которой лежит на прямой BC , проходит через точки A и D . Известно, что $AB^2 - AC^2 = 135$, а радиус окружности, описанной около треугольника ABC равен $7\sqrt{3}$. Найдите площадь треугольника ABC .

Вариант 6 (факультет вычислительной математики и кибернетики, июль, отделение бакалавров)

1. Решите уравнение

$$3 \cos x - \cos 2x = 1.$$

2. При каких значениях параметра a уравнение не имеет корней

$$|a|(a^2 + 1)x + 2a^2|a| - 6\sqrt{6} = \sqrt{6}a^2x + a^2 + (6 + \sqrt{6})a + a^2(a - \sqrt{6}) + \sqrt{6}x.$$

3. Решите неравенство

$$5^{x+1} + 2 \cdot 3^x \geq 3^{x+3} - 2 \cdot 5^{x-1}.$$

4. Решите неравенство

$$3 \sin(2 \arccos x) - 2 \cos(\arcsin x) \geq 0.$$

5. Дан прямоугольный параллелепипед $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$, у которого $AD = 10$, $AB = 2$ и $AA_1 = 6$. Найдите угол между прямой $B_1 D$ и прямой, проходящей через середины ребер AA_1 и $B_1 C_1$.

6. Из пункта A в пункт B в 9 часов утра выехал автобус. В тот же момент из пункта B в пункт A выехали мотоцикл и автомобиль. Известно, что скорость мотоцикла в два раза меньше скорости автомобиля. Автобус встретил автомобиль не ранее 11 часов 30 минут утра и прибыл в пункт B в 14 часов 50 минут того же дня. Известно, что между моментами встречи автобуса с автомобилем и автобуса с мотоциклом прошло не менее часа. Скорости автобуса, автомобиля и мотоцикла постоянны. Найдите время прибытия мотоцикла в пункт A .

7. Биссектриса угла A треугольника ABC пересекает сторону BC в точке D . Точка E лежит на прямой BC , причем угол DAE — прямой. Известно, что $AB^2 - AC^2 = 126$, а площадь треугольника ABC равна $192\sqrt{5}$. Найдите радиус окружности, описанной около треугольника ABC .