Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова

Вступительное испытание по математике 1998 года

Вариант 1 (факультет вычислительной математики и кибернетики, письменный тур Двухтуровой олимпиады по математике)

1. Решить неравенство
$$\frac{1}{\log_2 \frac{4}{x}} \geqslant \log_2 \frac{x}{8} - 1.$$

2. Решить неравенство
$$|\sqrt{x-4} - 3| > |\sqrt{9-x} - 2| + 1.$$

3. Решить уравнение
$$\operatorname{tg} x \cdot \sqrt{\sin x - 2\cos x - 1} = 0.$$

4. В четырехугольник $ABCD$ можно вписать окружность. Пусть K — точка пересечения его диагоналей. Известно, что $AB > BC > KC$, $BK = 4 + \sqrt{2}$, а периметр и площадь BKC равны соответственно 14 и 7. Найти DC.

5. Найти все значения параметра a, при которых уравнение имеет единственное решение:
$$2^{\frac{2x}{1+x^2}} + a \cdot \cos \frac{x^2-1}{x} + a^2 - \frac{5}{4} = 0.$$

6. Двугранный угол, образованный полуплоскостями α и β, равен $\frac{\pi}{3}$. Внутри этого угла расположен треугольник ABC. Ортогональные проекции треугольника ABC на полуплоскости α и β суть треугольники AB_1C_1 и AB_2C_2 соответственно (B_1 и B_2 — проекции точки B, C_1 и C_2 — проекции точки C). Известно, что $AB = 3\sqrt{25 - 4\sqrt{3}}$, $AC = \sqrt{19 - 4\sqrt{3}}$, $AB_1 = 9\sqrt{2}$, $AB_2 = 6\sqrt{3}$, $AC_1 > AC_2$, каждый из углов B_1AC_1 и B_2AC_2 равен $\frac{\pi}{12}$. Найти BC.

Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова

Вступительное испытание по математике 1998 года

Вариант 2 (факультет вычислительной математики и кибернетики, основной экзамен)

1. Решить неравенство

$$2x > \frac{5x+3}{|x+2|}.$$

2. Решить неравенство

$$\log_2(5-x)\cdot\log_{(x+1)}\frac{1}{8} \geqslant -6.$$

3. Решить уравнение

$$|\sin^3 x| + 13\cos^3 x - \cos x = 0.$$

4. В правильной треугольной пирамиде $SABC$ с вершиной S проведена высота SD. На отрезке SD взята точка K так, что $SK : KD = 1 : 2$. Известно, что двугранные углы между основанием и боковыми гранями равны $\dfrac{\pi}{6}$, а расстояние от точки K до бокового ребра равно $\dfrac{4}{\sqrt{13}}$. Найти объем пирамиды.

5. Найти все значения параметра a, при которых существуют (x,y), удовлетворяющие системе неравенств:

$$\begin{cases} \max(2-3y, y+2) \leqslant 5, \\ \sqrt{a^2 + \dfrac{6}{\pi}\cdot\arccos\sqrt{1-x^2} - 16 - \dfrac{2}{\pi^2}\arcsin x\cdot(\pi + 2\arcsin x)} \geqslant y^2 + 2ay + 7. \end{cases}$$

6. В остроугольном треугольнике ABC биссектриса AD делит пополам отрезок OH, где O — центр описанной окружности, H — точка пересечения высот. Известно, что $AC = 2$, $AD = \sqrt{3} + \sqrt{2} - 1$. Найти радиус описанной около треугольника ABC окружности.