Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова

Вступительное испытание по математике 1997 года

Вариант 1 (факультет вычислительной математики и кибернетики, предварительный экзамен)

1. Решить неравенство

$$\sqrt{\log_{2\cos\frac{2\pi}{5}}(x-1)} < 1.$$

2. Решить уравнение

$$\frac{4 - 3\cos 2x - 6\cos^2 x + 11\sin x}{\cos x + 2\sqrt{2}\sin x} = 0.$$

3. Найти все решения системы уравнений

$$\begin{cases} |y^2 + 4x - 5| + 2x = -3, \\ 2x + 2y = 3. \end{cases}$$

4. В треугольнике ABC точка D лежит на стороне BC, а точка O на отрезке AD. Известно, что точки C, D и O лежат на окружности, центр которой находится на стороне AC, $AC = 2\sqrt{2} \cdot AB$, величина угла DAC в два раза больше величины угла BAD, а величина угла OCA в два раза меньше величины угла OCB. Найти косинус угла ACB.

5. Найти все значения x, для которых неравенство выполняется для всех a из отрезка $[-2; 0]$:

$$\sqrt{2x^2 + 2x + a} > 4a \cdot x^2 - (2a - 1) \cdot (2x - 2) - 3a.$$

6. Объем пирамиды $SABC$ равен V. Через точки M и N, лежащие на ребрах AS и AB соответственно, и внутреннюю точку P грани ABC проведена плоскость, пересекающая прямую CS в точке L. Пусть D и E — точки пересечения прямых AP и BP с ребрами BC и AC соответственно. Известно, что $AN = NC$, $AM = 2 \cdot MS$ и $BP = 2 \cdot PE$. Найти объем пирамиды $ACLN$.

Вариант 2 (факультет вычислительной математики и кибернетики, основной экзамен)

1. Пункты A, B и C расположены на реке в указанном порядке вверх по течению. Расстояние между A и B равно 6 км, а между B и C — 18 км. В 11^{00} из пункта C отплыл катер и направился в пункт A. Достигнув пункта A, он сразу же повернул назад и в 13^{48} прибыл в пункт B. Скорость течения реки равна 5 км/час. Найти скорость катера в стоячей воде.

2. Решить неравенство

$$\log_{\frac{1}{5x^2}} 5 > \log_{1-x^2} \frac{1}{5}.$$

3. Решить уравнение

$$2 + |\cos x + 2 \cdot \sin x| = 2 \cdot \cos x - \sin x.$$

4. Найти все решения системы уравнений

$$\begin{cases} 25^x + 5^x + 3 \cdot 3^y = 6, \\ 3 \cdot 9^y + 5^x - 3^y = 2. \end{cases}$$

5. Внутри треугольника ABC выбрана точка O так, что $\sin \angle BOC = \frac{1}{5}$, $\sin \angle AOC = \frac{2}{7}$. Известно, что $BO = 3$, $BC = 4$, $AC = 6$. Найти расстояние между центрами окружностей, описанных около треугольников AOC и BOC.

6. Найти все значения параметра a, при которых уравнение имеет единственное решение:

$$\sqrt{-4x^3 + 11x^2 + 60x - 67} = 7 \cdot \sqrt{6x - x^2 - 5} + \sqrt{a^2 - 9a + 18}.$$