

Вариант 1 (факультет вычислительной математики и кибернетики, пробный экзамен)

1. В арифметической прогрессии с отличной от нуля разностью сумма членов с четными номерами, не превосходящими 29, равна 168. Найти номер того члена прогрессии, который равен 12.

2. Решить уравнение

$$|\log_{6x}(x^2 - 7x + 12) - 1| = 1 - \log_{6x}(x^2 - 7x + 12).$$

3. Найти все корни уравнения $4 \cdot 3^{\cos x} + 3^{-\cos x} = 4\sqrt{2}$, удовлетворяющие неравенствам

$$-\frac{7\pi}{3} < x < -\frac{\pi}{3}.$$

4. Для каждого значения параметра a решить неравенство $|\frac{1}{x} + 2a| \leq x$.

5. Две окружности радиусов r и R с центрами в точках O_1 и O касаются внутренним образом в точке K . В точке A окружности радиуса r проведена касательная, пересекающая окружность радиуса R в точках B и C . Известно, что $AC : AB = p$ и отрезок AC пересекает отрезок OK .

Определить:

1) при каких условиях на r , R и p возможна такая геометрическая конфигурация;

2) длину отрезка BC .

6. В кубе $ABCD A' B' C' D'$ с параллельными гранями $ABCD$ и $A' B' C' D'$ длина ребра равна 8. Через точки M , N и K , расположенные на ребрах BC , CD и CC' соответственно, проведена плоскость. Известно, что длина высоты треугольника MCK , опущенной из вершины C , равна $\frac{6}{\sqrt{13}}$, величина угла MNK равна $\arccos(\frac{3\sqrt{2}}{5})$, произведение длин отрезков MN и KN равно $30\sqrt{2}$ и площадь треугольника MNC меньше 7. Найти радиус сферы, касающейся плоскости треугольника MNK и трех граней куба с общей точкой A' .

Вариант 2 (факультет вычислительной математики и кибернетики, основной экзамен)

1. Найти все целые числа n и m , для которых $3n^2 + 2nm = 11$ и $n + 2m \geq 10$.
2. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 5x + xy + 5y = 10 + 7\sqrt{3}, \\ x^2 + y^2 = 7. \end{cases}$$

3. Медианы BK и CL треугольника ABC пересекаются в точке M под прямым углом. $AC = b$, $AB = c$. Найти площадь четырехугольника $AKML$.

4. Решить неравенство

$$\log_{2\sin x - 1}(43 - 4\sin x + 4\sin^2 x - x^2 + x) \leq \frac{3\log_3 2}{\log_3(2\sqrt{2})}.$$

5. Транспортное агенство осуществляет грузовые перевозки. Стоимость одного рейса при загрузке машины a тоннами груза складывается из эксплуатационных расходов $p_2 a^2$ тыс. руб., оплаты труда водителя p_3 тыс. руб. и прочих расходов $p_1 a$ тыс. руб. Числа p_1, p_2, p_3 являются соответственно первым, третьим и шестнадцатым членами некоторой арифметической прогрессии. Их сумма равна 340, а разность прогрессии d является корнем уравнения $d^2 - 37d + 340 = 0$. Агенство должно израсходовать 10000 тыс. руб. Если выполнено 12 одинаковых рейсов, то суммарная масса перевезенного груза больше 40 тонн. Сколько следует выполнить рейсов, чтобы масса перевезенного груза была максимальной?

6. В кубе $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ с параллельными гранями $ABCD$ и $A_1 B_1 C_1 D_1$ длина ребра равна 1. Точки K и N являются серединами ребер DC и BC соответственно. Точка M лежит на ребре CC_1 и $MC = \frac{2}{3}$. Найти минимальное значение радиусов сфер, проходящих через точки M, N, K и касающихся плоскости $BB_1 D_1 D$.