

Вариант 1 (механико-математический факультет)

1. Решите уравнение

$$7 \cos \left( x + \frac{\pi}{3} \right) + \left| \cos \left( x - \frac{\pi}{6} \right) \right| = 1.$$

2. Диагонали четырехугольника  $PQRS$ , вписанного в окружность, пересекаются в точке  $D$ . На прямой  $PR$  взята точка  $A$ , причем  $\angle SAD = 50^\circ$ ,  $\angle PQS = 70^\circ$ ,  $\angle RQS = 60^\circ$ . Где расположена точка  $A$ : на диагонали  $PR$  или на ее продолжении? Ответ обоснуйте.

3. Даны числа  $p$  и  $q$  такие, что  $p = \log_z y$ ,  $q = \log_x y$ . Найдите число  $\log \left( \frac{xz}{y^2} \right)^3 \sqrt{xyz}$ , считая, что оно определено.

4. Один рабочий на новом станке производит за 1 час целое число деталей, большее 8, а на старом станке — на 3 детали меньше. На новом станке один рабочий выполняет дневную норму за целое число часов, а два рабочих вместе выполняют норму на старых станках на 1 час быстрее. Из какого количества деталей состоит дневная норма?

5. На прямой  $p$  в пространстве последовательно расположены точки  $A$ ,  $B$  и  $C$  такие, что  $AB = 27$  и  $BC = 18$ . Найдите расстояние между прямыми  $p$  и  $q$ , если расстояния от точек  $A$ ,  $B$  и  $C$  до прямой  $q$  равны 17, 10 и 8 соответственно.

6. Найдите все значения  $x$ , при каждом из которых неравенство

$$(2 - a)x^3 + (1 - 2a)x^2 - 6x + (5 + 4a - a^2) < 0$$

выполняется хотя бы при одном значении  $a$ , принадлежащем отрезку  $[-1; 2]$ .

Вариант 2 (факультет вычислительной математики и кибернетики)

1. Какое из двух чисел  $\sqrt[3]{\frac{1990}{1991}}$  и  $\sqrt[3]{\frac{1991}{1992}}$  больше?

2. Решите уравнение

$$\sqrt{1 + \cos 4x} \sin x = 2 \sin \frac{\pi}{4}.$$

3. Решите неравенство

$$\log_2(11 - x) + \log_2(x + 1) \leq \log_2((x + 1) \cdot (x^2 + 5x - 5)).$$

4. Из города  $A$  в город  $B$  выехал автомобиль. Спустя некоторое время из  $B$  в  $A$  по той же дороге выехал мотоцикл. Скорости автомобиля и мотоцикла на всем пути постоянны. Автомобиль до встречи с мотоциклом находился в пути 7 часов 30 минут, а мотоцикл до встречи ехал 3 часа. Мотоцикл прибыл в  $A$  в 23 часа, а автомобиль прибыл в  $B$  в 16 часов 30 минут. Найдите время отправления мотоцикла из города  $B$ .

5. Две окружности пересекаются в точках  $A$  и  $K$ . Их центры расположены по разные стороны от прямой, содержащей отрезок  $AK$ . Точки  $B$  и  $C$  лежат на разных окружностях. Прямая, содержащая отрезок  $AB$ , касается одной окружности в точке  $A$ . Прямая, содержащая отрезок  $AC$ , касается другой окружности также в точке  $A$ . Длина отрезка  $BK$  равна 1, длина отрезка  $CK$  равна 4, а тангенс угла  $CAB$  равен  $\frac{1}{\sqrt{15}}$ . Найдите площадь треугольника  $ABC$ .

6. Найдите все значения  $a$ , при каждом из которых неравенство

$$\frac{4}{3}(x^2 - ax) - \frac{\pi}{3} < \sin(x^2 - ax) + \cos\left(2x^2 - 2ax + \frac{\pi}{4}\right)$$

выполняется для всех  $x$  из отрезка  $[\pi; 2\pi]$ .

Вариант 3 (физический факультет)

1. Решите неравенство  $1 - 2x^2 > 2x$ .
2. Решите уравнение  $5 - 3 \cos 2x = 8 \sin x$ .
3. Решите уравнение  $2 \log_2 x^3 - 1 = \frac{1}{2} \log_2 x$ .
4. Площадь треугольника  $ABC$  равна  $S$ ,  $\angle BAC = \alpha$ ,  $AC = b$ . Найдите  $BC$ .
5. Найдите первый член и разность арифметической прогрессии, если известно, что пятый и девятый члены дают в сумме 40, а сумма седьмого и тринадцатого членов равна 58.
6. Через центр окружности, описанной около треугольника  $ABC$ , проведены прямые, перпендикулярные сторонам  $AC$  и  $BC$ . Эти прямые пересекают высоту  $CH$  треугольника или ее продолжение в точках  $P$  и  $Q$ . Известно, что  $CP = p$ ,  $CQ = q$ . Найдите радиус окружности, описанной около треугольника  $ABC$ .
7. Известно, что некоторая нечетная функция при  $x > 0$  определяется формулой  $f(x) = \log_3 \left( \frac{x}{3} \right)$ . Найдите, какой формулой определяется функция  $f(x)$  при  $x < 0$ . Решите уравнение  $f(x) = 3$ .
8. Три шара с одинаковым радиусом  $R$  касаются друг друга, и каждый из них касается боковой поверхности конуса. Центры шаров находятся вне конуса. Высота конуса перпендикулярна плоскости  $\alpha$ , содержащей центры шаров. Угол между высотой конуса и его образующей равен  $\varphi$ . Найдите расстояние от вершины конуса до плоскости  $\alpha$ .