Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова

Вступительное испытание по математике 1988 года

Вариант 1 (механико-математический факультет)

1. Решите уравнение

$$\sqrt{1-\cos 2x} = \sin 2x.$$

2. Решите неравенство

$$\log_{5x-4x^2} 4^{-x} > 0.$$

3. В параллелограмме $PQRS$ биссектриса угла при вершине P, равного 80°, пересекает сторону RS в точке L. Найдите радиус окружности, касающейся отрезка PQ и лучей QR и PL, если известно, что $PQ = 7$.

4. Угол между скрещивающимися прямыми AB и CD равен $\arccos \dfrac{\sqrt{35}}{10}$. Точки E и F являются серединами отрезков AB и CD соответственно, а прямая EF перпендикулярна прямым AB и CD. Найдите угол ACB, если известно, что $AB = 2\sqrt{5}$, $CD = 2\sqrt{7}$ и $EF = \sqrt{13}$.

5. Два мотоциклиста стартовали раздельно в одной точке стадиона в гонке на 30 кругов, причем второй начал движение, когда первый прошел полкруга. Один из зрителей вышел со стадиона, когда мотоциклисты были рядом. Когда через 4 минуты он вернулся, мотоциклисты снова были рядом. Если бы первый мотоциклист после 14 кругов увеличил скорость в 4 раза, а второй мотоциклист после 12 кругов — в 2 раза, то они финишировали бы одновременно. Определите, с какой разницей во времени финишировали мотоциклисты, если пришедший первым проезжал за минуту более 5 кругов.

6. Найдите все значения a, при которых система

$$\begin{cases} \sin x \cdot \sin y = \dfrac{1}{z^2}, \\ \cos x \cdot \cos y = \dfrac{(x+y)^2}{(a-\pi)^2}, \\ \sin(x-y) = \dfrac{2(x+y)}{(a-\pi)z} \end{cases}$$

имеет одно решение, удовлетворяющее условиям $0 \leqslant y \leqslant \dfrac{\pi}{2}$ и $z > 0$.

Вариант 2 (факультет вычислительной математики и кибернетики)

1. Найдите сумму первых двадцати членов арифметической прогрессии, если известно, что сумма третьего, седьмого, четырнадцатого и восемнадцатого членов этой прогрессии равна 10.

2. Решите уравнение

$$\cos 7x + \cos x = 2\cos 3x(\sin 2x - 1).$$

3. Гипотенуза AB прямоугольного треугольника ABC является хордой окружности радиусом 10. Вершина C лежит на диаметре окружности, который параллелен гипотенузе. Угол CAB составляет 75°. Найдите площадь треугольника ABC.

4. Решите неравенство

$$8^x \geqslant 6 \cdot 9^{|x-1|}.$$

5. Найдите все значения параметра a, при которых уравнение

$$\Big((2x+a)\sqrt{22a-4a^2-24} - 2(x^2+x)\lg a\Big) \cdot \lg\left(\frac{36a-9a^2}{35}\right) = 0$$

имеет по крайней мере два корня, один из которых неотрицателен, а другой не превосходит -1.

6. Сфера с центром в точке O пересечена плоскостью π. Внутри сферы расположены три шара, два из которых одного радиуса, а третий меньшего радиуса. Каждый из шаров касается двух других шаров, плоскости π и сферы. Известно, что синус угла между плоскостью, проходящей через центры шаров, и плоскостью π равен $1/\sqrt{5}$, а косинус угла между радиусами меньшего и большего шаров, проведенными в точке касания их со сферой, равен $4/5$. Расстояние от центра меньшего шара до точки O равно 15. Найдите расстояние от точки O до плоскости π, если известно, что оно больше 14.

Вариант 3 (физический факультет)

1. Решите уравнение

$$\cos 2x + 8\sin x = 3.$$

2. В прямоугольном треугольнике величина острого угла равна α, а радиус окружности, описанной около этого треугольника, равен R. Найдите длину высоты треугольника, опущенной на гипотенузу.

3. Решите уравнение

$$\sqrt{4 - 6x - x^2} = x + 4.$$

4. В параллелограмме $ABCD$ биссектриса угла BAD пересекает сторону CD в точке M такой, что $DM : MC = 2$. Известно, что величина угла CAM равна α. Найдите величину угла BAD.

5. При каких значениях a система

$$\begin{cases} axy + x - y + \dfrac{3}{2} = 0, \\ x + 2y + xy + 1 = 0 \end{cases}$$

имеет единственное решение?

6. В треугольной пирамиде $SABC$ (S — вершина) угол ACB — прямой, $AC = 3$, $BC = 4$, $SC = \sqrt{38}$. Боковые грани пирамиды одинаково наклонены к основанию ABC. В пирамиду вписан цилиндр, площадь боковой поверхности которого равна $8\pi/3$. Нижнее основание цилиндра находится в плоскости основания пирамиды, а окружность верхнего основания имеет ровно по одной общей точке с каждой из боковых граней пирамиды. Найдите радиус основания цилиндра.