

Вариант 1 (механико-математический факультет)

1. Решите уравнение

$$\cos\left(\frac{1}{\sin x}\right) = \frac{1}{2}.$$

2. Решите неравенство

$$\log_{\sqrt{6}-\sqrt{2}}(x^2 + 4x + 11 - 4\sqrt{3}) < 2.$$

3. Радиус вписанной в треугольник ABC окружности равен 4, причем $AC = BC$. На прямой AB взята точка D , удаленная от прямых AC и BC на расстояния 11 и 3 соответственно. Найдите косинус угла DBC .

4. Два поезда выехали одновременно в одном направлении из городов A и B , расположенных на расстоянии 60 км друг от друга, и одновременно прибыли на станцию C . Если бы один из них увеличил свою скорость на 25 км/ч, а другой — на 20 км/ч, то они также прибыли бы одновременно на станцию C , но на 2 часа раньше. Найдите скорости поездов.

5. Найдите все пары значений a и b , для которых система

$$\begin{cases} x^2 - y^2 + a(x + y) = x - y + a, \\ x^2 + y^2 + bxy - 1 = 0 \end{cases}$$

имеет не менее пяти решений (x, y) .

6. Сфера касается ребер AS , BS , BC и AC треугольной пирамиды $SABC$ в точках K , L , M и N соответственно. Найдите длину отрезка KL , если $MN = 7$ см, $NK = 5$ см, $LN = 2\sqrt{29}$ см и $KL = LM$.

Вариант 2 (факультет вычислительной математики и кибернетики)

1. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x} + 3y = 9, \\ x - 1 = (\sqrt{x} + 1)y. \end{cases}$$

2. Существуют ли действительные значения a , для которых

$$a^2 - 4a + \sqrt{3} = -a\sqrt{2}?$$

Если такие значения существуют, то сколько их?

3. Решите неравенство

$$\log_{(x+1)^2} 8 + 3 \log_4(x+1) \geq 9\frac{1}{4}.$$

4. Решите уравнение

$$(2 + 3 \cos 2x)(\sqrt{2 \cos 2x + 3 \sin x + 3} - 2 \sin x + 1) = 0.$$

5. С завода на стройку нужно перевезти 24 больших и 510 маленьких бетонных блоков. Доставка блоков осуществляется автомашинами, каждая из которых вмещает 44 маленьких блока и имеет грузоподъемность 10 тонн. Масса маленького блока 0,2 тонны, большого — 3,6 тонны, большой блок занимает место 14 маленьких. Найдите минимальное число рейсов, достаточное для перевозки всех блоков.

6. В пирамиде $ABCD$ проведено сечение $KMLN$ так, что точка K лежит на ребре AD , точка M — на ребре DC , точка N — на ребре AB , точка L — на ребре BC . O — точка пересечения диагоналей KL и MN четырехугольника $KMLN$. Сечение $KMLN$ делит пирамиду на две части. Найдите отношение объемов этих частей, если известны следующие соотношения между длинами отрезков:

$$4 \cdot OL = 3 \cdot OK, \quad 25 \cdot ON = 24 \cdot OM, \quad DK \cdot NA - KA \cdot BN = KA \cdot NA.$$

Вариант 3 (физический факультет)

1. Решите неравенство

$$\frac{1}{2x} \geq \frac{1}{1-x}.$$

2. Решите уравнение

$$4^{\sin x} + 2^{5-2\sin x} = 18.$$

3. Известно, что $\sin \alpha = -\frac{\sqrt{5}}{3}$, $\pi < \alpha < \frac{4\pi}{3}$. Найдите $\cos \alpha$ и $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$.

4. Найдите область определения функции

$$y = \sqrt{\log_{\frac{1}{2}}(3x^2 - 2x)}.$$

5. Внутри прямоугольного треугольника ABC (угол B — прямой) взята точка D так, что площади треугольников ABD и BDC соответственно в три и четыре раза меньше площади треугольника ABC . Длины отрезков AD и DC равны соответственно a и c . Найдите длину отрезка BD .

6. Шар радиусом 2 вписан в правильную четырехугольную пирамиду $SABCD$ с вершиной S . Второй шар радиусом 1 касается первого шара, основания пирамиды и боковых граней BSC и CSD . Найдите объем пирамиды и величину двугранного угла при боковом ребре SC .