

Вариант 1 (механико-математический факультет)

1. Решите уравнение

$$2 \sin \left(\sqrt{x} + \frac{\pi}{2} \right) - \sqrt{3} = 0.$$

2. Окружность радиуса 2 касается окружности радиуса 4 в точке B . Прямая, проходящая через точку B , пересекает окружность меньшего радиуса в точке A , а большего радиуса — в точке C . Найдите длину отрезка BC , если длина отрезка AC равна $3\sqrt{2}$.

3. Решите неравенство

$$3^{\frac{1}{4} \log_3^2 x} \leq \frac{1}{3} x^{\frac{1}{3} \log_3 x}.$$

4. Путь из села в город идет сначала по грунтовой дороге, а затем по шоссе. Из села в город в 9 часов утра выехал автомобилист и одновременно с ним из города в село выехал мотоциклист. Автомобилист двигался по шоссе быстрее, чем по грунтовой дороге, в $1\frac{1}{2}$ раза, а мотоциклист — в $1\frac{2}{3}$ раза (движение обоих по шоссе и по грунтовой дороге считать равномерным). Они встретились в 12 часов, автомобилист приехал в город в 14 часов 20 минут, а мотоциклист приехал в село в 16 часов. Определите, сможет ли автомобилист приехать в город до 14 часов 40 минут, если он весь путь из села в город будет ехать с первоначальной скоростью.

5. Найдите все значения a , при каждом из которых для любого значения b система

$$\begin{cases} x - by + az^2 = 0, \\ 2bx + (b - 6)y - 8z = 8 \end{cases}$$

имеет по крайней мере одно решение (x, y, z) .

6. В основании пирамиды $PQRST$ лежит четырехугольник $QRST$, у которого стороны QR и ST параллельны, длина стороны QR равна 6, длина стороны QT равна 4, а величина угла RQT равна 120° . Длина ребра PQ равна $2\sqrt{14}$. Найдите объем пирамиды, если известно, что через прямые QR и ST можно провести две плоскости, не совпадающие с основанием пирамиды и пересекающие пирамиду по равным четырехугольникам.

Вариант 2 (факультет вычислительной математики и кибернетики)

1. Решите неравенство

$$\log_5((x+1)(x+3)) \leq 1.$$

2. Найдите координаты точки, лежащей на прямой $-4x - 3y = 25$ и наименее удаленной от начала координат.

3. Число двухкомнатных квартир в доме в четыре раза больше числа однокомнатных, а число трехкомнатных квартир кратно числу однокомнатных. Если число трехкомнатных квартир увеличить в пять раз, то их станет на 22 больше, чем двухкомнатных. Сколько всего квартир в доме, если известно, что их не меньше 100?

4. В окружности радиуса $R = \sqrt{6}$ проведены хорда MN и диаметр MP . В точке N проведена касательная к окружности, которая пересекает продолжение диаметра MP в точке Q под углом в 60° . Найдите длину медианы QD треугольника MQN .

5. Решите уравнение

$$2\sqrt{3} \sin 5x - \sqrt{3} \sin x = \cos 24x \cdot \cos x + 2 \cos 5x - 6.$$

6. Найдите значения a и b , при которых наибольшее значение функции

$$y(x) = \left| \frac{9}{4} \frac{5^x + 5^{-x} - 2}{5^x + 5^{-x} + 2} + (a - b) \frac{3}{2} \frac{5^x - 1}{5^x + 1} + 2a + b \right|$$

на отрезке $[-1; 1]$ является наименьшим.

Вариант 3 (физический факультет)

1. Решите уравнение

$$\left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{4-x^2}{2}} = 8^x.$$

2. Решите неравенство

$$x - 1 > \frac{4x}{3 - x}.$$

3. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 3^y = x, \\ 2 \sin x + \sin 2x = 2 \cos^2 \frac{x}{2}. \end{cases}$$

4. Решите уравнение

$$x \log_2(x^2) + 1 = 2x + 2 \log_4 x.$$

5. В треугольной пирамиде $SABC$ на ребре SB взята точка M , делящая отрезок SB в отношении $3 : 5$, считая от точки S . Через точки A и M параллельно медиане BD треугольника ABC проведена плоскость. В каком отношении эта плоскость делит объем пирамиды?

6. В треугольнике ABC проведена высота AH длины h , медиана AM длины l и биссектриса AN . Точка N — середина отрезка MH . Найдите расстояние от вершины A до точки пересечения высот треугольника ABC .

Вариант 4 (факультет вычислительной математики и кибернетики)

1. Решить неравенство

$$\log_2(x + 5) \leq 1 - \log_2(x - 3).$$

2. Найти координаты точки, лежащей на прямой $7x + 5y = 37$ и наименее удаленной от начала координат.

3. Завод, выпускающий ЭВМ трех типов, перевыполнил план, который составлял 130 ЭВМ. ЭВМ первого типа было изготовлено в два раза больше, чем ЭВМ третьего типа, а количество произведенных ЭВМ второго типа кратно числу ЭВМ третьего типа. При увеличении производства ЭВМ второго типа в три раза их число превосходило бы количество произведенных ЭВМ первого типа на 34. Сколько ЭВМ сверх плана выпустил завод?

4. В окружности радиуса $R = 2\sqrt{3}$ проведены хорда AB и диаметр AK , образующий с хордой угол $\pi/12$. В точке B проведена касательная к окружности, пересекающая продолжение диаметра AK в точке C . Найти длину медианы AM треугольника ABC .

5. Решить уравнение

$$3 + \sin \frac{15x}{4} \cdot \cos x = \sqrt{3} \sin x + \cos 3x.$$

6. Найти значения a и b , при которых наибольшее значение функции

$$y(x) = \left| \frac{25}{9} \frac{2^x + 2^{-x} - 2}{2^x + 2^{-x} + 2} + (a - 2b) \frac{5}{3} \frac{2^x - 1}{2^x + 1} + 2a - b \right|$$

на отрезке $[-2; 2]$ является наименьшим.

Вариант 5 (факультет вычислительной математики и кибернетики)

1. Решить систему уравнений:

$$\begin{cases} \sin y \cdot \cos x + \sin x = 0, \\ 2 \cos^2 y + \sin y \cdot \sin x = \cos 2y \cdot \cos x. \end{cases}$$

2. Решить неравенство:

$$\log_{2x - \frac{4}{25}} \left(\frac{x^2 - 14x + 51}{50} \right) \leq 0.$$

3. В прямоугольном треугольнике ABC из вершины прямого угла C проведены биссектриса $CL = a$ и медиана $CM = b$. Найти площадь треугольника ABC .

4. Точки A, B, C, D, E, F лежат на сфере радиуса $\sqrt{2}$. Отрезки AD, BE и CF пересекаются в точке S , находящейся на расстоянии 1 от центра сферы. Объемы пирамид $SABC$ и $SDEF$ относятся, как 1 : 9, пирамид $SABF$ и $SDEC$ — как 4 : 9, пирамид $SAEC$ и $SDBF$ — как 9 : 4. Найти отрезки SA, SB, SC .

5. Из пункта A одновременно стартуют три бегуна и одновременно финишируют в том же пункте, пробежав по маршруту, состоящему из прямолинейных отрезков AB, BC, CA , образующих треугольник ABC . На каждом из указанных отрезков скорости всех бегунов постоянны и равны у первого 10, 16 и 14 км/ч соответственно, у второго — 12, 10 и 16 км/ч соответственно. Третий бегун в пунктах B и C оказывается не один и меняет скорость на маршруте один раз. Установить, является ли треугольник ABC остроугольным или тупоугольным.