

Вариант 1 (механико-математический факультет)

1. Решите уравнение

$$6 \cos x - \frac{1}{3} = \sqrt{32 \cos x - \frac{17}{9}}.$$

2. Решите неравенство

$$\frac{1}{x-1} + \frac{3}{|x|+1} \geq \frac{1}{|x|-1}.$$

3. Некоторая окружность касается прямых AB и BC соответственно в точках D и E . Точка A лежит между точками B и D , а точка C — между точками B и E . Найдите площадь треугольника ABC , если длины сторон AB и AC соответственно равны 13 и 1, а точки A , D , E и C лежат на одной окружности.

4. Из трех значений p : $0, 24\pi$; $0, 26\pi$; $0, 6\pi$ — найдите те, при которых уравнение

$$\left(\frac{p-5x}{\pi} + \log_3 \frac{3p}{\pi} \right) (6 \sin(p-x) - \sqrt{18}) = 0$$

имеет хотя бы одно решение, удовлетворяющее условию $0 < x < \frac{\pi}{3}$.

5. На плоскости α , проходящей через центр шара радиуса R , задана окружность с центром O_1 и радиусом r_1 , расположенная внутри шара. Все точки этой окружности соединены прямыми с точкой A , принадлежащей шару и удаленной от плоскости α на расстояние R . Множество отличных от A точек пересечения этих прямых с поверхностью шара является окружностью с центром O_2 и радиусом r_2 . Найдите расстояние от точки O_2 до плоскости α , если расстояние между точками A и O_1 равно a .

Вариант 2 (факультет вычислительной математики и кибернетики)

1. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 6^x - 2 \cdot 3^y = 2, \\ 6^x \cdot 3^y = 12. \end{cases}$$

2. В трапеции $PQRS$ длина основания QR равна 10, длина диагонали QS равна 19, а величина угла QSP равна 30° . Выясните, что больше: длина основания QR или длина стороны RS .

3. Решите уравнение

$$4 - \cos [2\pi(13x + 9)^2] = 5 \cdot \sin [\pi(13x + 9)^2].$$

4. Решите неравенство

$$\frac{2 \log_{1-3|x|} (42x^2 - 14|x| + 1)}{\log_{1-3|x|} (x - \frac{5}{6})^2} \leq 1.$$

5. Найдите все тройки чисел x, y, z , удовлетворяющие уравнению

$$\sqrt{\frac{3}{2}x^2 - 2y^2 + 2z^2 + 10z + 6y + \frac{\sqrt{3}}{2}} - 17 + \sqrt{3x^2} - 2\sqrt{3}(\cos \pi y + \cos \pi z)x + 4 = 0.$$

6. Все ребра тетраэдра $ABCD$ имеют равную длину. На ребрах AB , AC и AD выбраны, соответственно, точки K, L, M так, что длина отрезка KB равна 15, а длина отрезка MD равна 10. Известно, что радиус шара, вписанного в тетраэдр $ABCD$, равен $\frac{5}{2}\sqrt{6}$, а объем пирамиды $AKLM$ равен $375\sqrt{2}$. Найдите сумму радиусов двух шаров: вписанного в пирамиду $AKLM$ и описанного около нее.