Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова

Вступительное испытание по математике 1983 года

Вариант 1 (механико-математический факультет)

1. Решите неравенство

$$\frac{\sqrt{6+x-x^2}}{2x+5} > \frac{\sqrt{6+x-x^2}}{x+4}.$$

2. Решите уравнение

$$\log_2\left(\cos 2x + \cos\frac{x}{2}\right) + \log_{\frac{1}{2}}\left(\sin x + \cos\frac{x}{2}\right) = 0.$$

3. В треугольнике ABC с периметром $2p$ длина стороны AC равна a и величина острого угла ABC равна α. Вписанная в треугольник ABC окружность с центром O касается стороны BC в точке K. Найдите площадь треугольника BOK.

4. Найдите все значения a, при которых система уравнений

$$\begin{cases} \left|12\sqrt{\cos\frac{\pi y}{2}} - 5\right| - \left|12\sqrt{\cos\frac{\pi y}{2}} - 7\right| + \left|24\sqrt{\cos\frac{\pi y}{2}} + 13\right| = 11 - \sqrt{\sin\frac{\pi(x-2y-1)}{3}}, \\ 2(x^2+(y-a)^2) - 1 = 2\sqrt{x^2+(y-a)^2-\frac{3}{4}}, \end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение.

5. Дана треугольная пирамида $ABCD$. Точка F взята на ребре AD, а точка N взята на ребре DB так, что $|DN| : |NB| = 1 : 2$. Через точки F, N и точку пересечения медиан треугольника ABC проведена плоскость, пересекающая ребро CB в точке H. Через точку H проведена плоскость, параллельная плоскости (ADB) и пересекающая ребра CA и CD в точках L и K соответственно. Известно, что $|CH| : |HB| = (|AF| : |FD|)^2$ и что радиус шара, вписанного в пирамиду $CHLK$, равен R. Найдите отношение площади треугольника ABC к сумме площадей всех граней пирамиды $ABCD$, если длина перпендикуляра, опущенного из вершины D на плоскость ABC, равна h.

Вариант 2 (факультет вычислительной математики и кибернетики)

1. Найдите область определения функции

$$y = \sqrt{16 - x^2} \cdot \log_2(x^2 - 5x + 6).$$

2. Найдите все решения уравнения

$$\frac{1 + 2\sin^2 x - 3\sqrt{2}\sin x + \sin 2x}{2\sin x \cdot \cos x - 1}.$$

3. Найдите площадь фигуры, которая задается на координатной плоскости неравенством

$$2|x| + |y + 2x + 1| < 5.$$

4. Угол при основании равнобедренного треугольника равен $\pi/6$. Построен круг радиуса $2/\sqrt{3}$ с центром в вершине треугольника. Определите отношение общей части треугольника и круга к площади треугольника, если длина медианы, проведенной к боковой стороне, равна $\sqrt{7}$.

5. При всех a решите уравнение

$$(x - 3)(x + 1) + 3(x - 3)\sqrt{\frac{x + 1}{x - 3}} = (a - 1)(a + 2)$$

и определите, при каких a оно имеет ровно одно решение.

6. Найдите все решения уравнения

$$\sqrt{2 - |y|} \cdot (5\sin^2 x - 6\sin x \cdot \cos x - 9\cos^2 x + 3\sqrt[3]{33}) = \arcsin^2 x + \arccos^2 x - \frac{5}{4}\pi^2.$$

Вариант 3 (физический факультет)

1. Решите уравнение

$$\sin 3x + \sin 5x = \sin 4x.$$

2. Решите уравнение

$$|5x^2 - 3| = 2.$$

3. Решите неравенство

$$\frac{3}{2}\log_4 \sqrt[3]{x} - \frac{1}{2}\log_2 x > 1.$$

4. После деления некоторого двузначного числа на сумму его цифр в частном получается 7, а в остатке 6. После деления этого же двузначного числа на произведение его цифр в частном получается 3 и в остатке 11. Найдите это двузначное число.

5. Прямая, параллельная гипотенузе AB прямоугольного треугольника ABC, пересекает катет AC в точке D, а катет BC — в точке E, причем длина отрезка DE равна 2, а длина отрезка BE равна 1. На гипотенузе взята точка F так, что длина отрезка BF равна 1. Известно также, что величина угла FCB равна α. Найдите площадь треугольника ABC.

6. Дан трехгранный угол с вершиной O, у которого величина каждого из плоских углов равна φ. Плоскость α пересекает ребра этого трехгранного угла в точках A, B и C, причем отрезки OA и OB равной длины, а отрезок OC короче отрезка OA. Известно, что величина двугранного угла между плоскостью α и гранью OAB равна β. Два шара расположены по разные стороны от плоскости α так, что каждый шар касается всех граней трехгранного угла и плоскости α. Найдите:

1) величину угла между прямой, проходящей через центры шаров, и плоскостью грани OAB,

2) отношение радиусов указанных шаров.