

Вариант 1 (механико-математический факультет)

1. Решите неравенство

$$\frac{\sqrt{x-5}}{\log_{\sqrt{2}}(x-4) - 1} \geq 0.$$

2. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{\sin x} \cdot \cos y = 0, \\ 2 \sin^2 x - \cos 2y - 2 = 0. \end{cases}$$

3. В два различных сосуда налиты растворы соли, причем в первый сосуд налито 5 кг, а во второй — 20 кг. При испарении воды процентное содержание соли в первом сосуде увеличилось в p раз, а во втором сосуде — в q раз. О числах p и q известно только, что $pq = 9$. Какое наибольшее количество воды могло при этом испариться из обоих сосудов вместе?

4. Трапеция $ABCD$ вписана в окружность ($BC \parallel AD$). На дуге CD взята точка E и соединена со всеми вершинами трапеции, $\widehat{CED} = 120^\circ$, $\widehat{ABE} - \widehat{BAE} = a$. Найдите для треугольника ABE отношение периметра к радиусу вписанной окружности.

5. Отрезок DE , лежащий в двугранном угле AD с точками B и C на его гранях, параллелен плоскости треугольника ABC , имеющего площадь S . В тетраэдр $BCDE$ вписан шар, k — отношение расстояния от центра шара до прямой DE к расстоянию от DE до плоскости ABC . Пусть B' — проекция точки B на плоскость CDE и известно, что $\operatorname{tg} \widehat{B'DE} : \operatorname{tg} \widehat{BDE} = l$. Через середину AD проводится плоскость P , параллельная плоскости ABC . Найдите площадь сечения многогранника $ABCDE$, составленного из тетраэдров $ABCD$ и $BCDE$, плоскостью P , если известно, что сумма площадей всех граней тетраэдра $BCDE$ равна σ .

Вариант 2 (механико-математический факультет)

1. Решите неравенство

$$\frac{|\log_{\sqrt{2}}(x-3)|^2}{x^2-4x-5} \geq 0.$$

2. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{\cos 2x} \cdot \cos x = 0, \\ 2 \sin^2 x - \cos\left(2y - \frac{\pi}{3}\right) = 0. \end{cases}$$

3. В двух различных емкостях содержались смеси воды и песка, причем в первой емкости было 1000 кг смеси, а во второй — 1960 кг. В обе емкости добавили воды. При этом процентное содержание песка в смесях уменьшилось в k раз в первой емкости и в l раз во второй. О числах k и l известно только, что $kl = 9 - k$. Найти наименьшее количество воды, которое могло быть долито в обе емкости вместе?

4. Пятиугольник $ABCDE$ вписан в окружность, $BD \parallel AE$, $\widehat{CAE} = 2\widehat{CEA}$, $\widehat{CBD} - \widehat{CDB} = a$. Найдите для треугольника ACE отношение радиуса описанной окружности к периметру.

5. Отрезок FG параллелен плоскости выпуклого пятиугольника $ABCDE$ площади S . Точки A и G лежат по разные стороны от плоскости CBF . В тетраэдр $BCFG$ вписан шар, k — отношение расстояния от центра шара до прямой FG к расстоянию от FG до плоскости $ABCDE$. Двугранный угол BF с точками C и G на гранях равен a , а $\sin \widehat{CFB} : \sin \widehat{CFG} = l$. Через середину AF проведена плоскость P , параллельная плоскости $ABCDE$. Найдите площадь сечения плоскостью P многогранника $ABCDEF$, составленного из пирамиды $FABCDE$ с вершиной F и тетраэдра $BCFG$, если известно, что сумма площадей всех граней тетраэдра $BCFG$ равна σ .