Вариант 1 (факультет вычислительной математики и кибернетики)

1. Решить неравенство

$$(x-1)\sqrt{x^2-x-2} \geqslant 0.$$

2. Найти точки минимума функции

$$\sqrt{3}\cos\frac{x}{2} + \sin\frac{x}{2} - \frac{x-3}{2}.$$

3. Найти уравнение прямой, проходящей через точку с координатами $\left(\frac{1}{2}; 2\right)$, касающейся графика функции $y = -\frac{x^2}{2} + 2$ и пересекающей в двух различных точках график функции $y = \sqrt{4-x^2}$.

4. Совокупность A состоит из различных натуральных чисел. Количество чисел в A больше семи. Наименьшее общее кратное всех чисел из A равно 210. Для любых двух чисел из A их наибольший общий делитель больше единицы. Произведение всех чисел из A делится на 1920 и не является квадратом никакого целого числа. Найти числа, из которых состоит A.

5. Основанием пирамиды $ABCEH$ служит выпуклый четырехугольник $ABCE$, который диагональю BE делится на два равновеликих треугольника. Длина ребра AB равна единице, длины ребер BC и CE равны. Сумма длин ребер AH и EH равна $\sqrt{2}$. Объем пирамиды равен $\frac{1}{6}$. Найти радиус шара, имеющего наибольший объем среди всех шаров, помещающихся в пирамиде $ABCEH$.

Вариант 2 (механико-математический факультет)

1. Разность

$$\sqrt{|40\sqrt{2}-57|}-\sqrt{40\sqrt{2}+57}$$

является целым числом. Найдите это целое число.

2. Найти все решения уравнения

$$\int\limits_0^{\alpha}\cos(x+\alpha^2)dx=\sin\alpha,$$

принадлежащие отрезку $[2,3]$.

3. В остроугольном треугольнике ABC из вершин A и C опущены высоты AP и CQ на стороны BC и AB. Известно, что площадь треугольника ABC равна 18, площадь треугольника BPQ равна 2, а длина отрезка PQ равна $2\sqrt{2}$. Вычислить радиус окружности, описанной около треугольника ABC.

4. Найти все значения параметра a, при которых система неравенств

$$\begin{cases} x^2+2xy-7y^2\geqslant \frac{1-a}{a+1}, \\ 3x^2+10xy-5y^2\leqslant -2. \end{cases}$$

имеет решение.

5. Объем тетраэдра $ABCD$ равен 5. Через середины ребер AD и BC проведена плоскость, пересекающая ребро CD в точке M. При этом отношение длины отрезка DM к длине отрезка MC равно $\frac{2}{3}$. Вычислить площадь сечения тетраэдра указанной плоскостью, если расстояние от нее до вершины A равно 1.