

Вариант 1 (факультет вычислительной математики и кибернетики)

1. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 4 \lg \sqrt{x} + 2^{y+1} = 3, \\ 24 \lg x + 2 \cdot 4^{y+1} = 37. \end{cases}$$

2. Найти такие решения неравенства, что  $|x| < \pi$

$$\sqrt{3 \cos 2x} < \sqrt{2} \cos x.$$

3. В поле работают тракторные бригады, содержащие по одинаковому количеству гусеничных тракторов и по одинаковому количеству колесных тракторов, причем в каждой бригаде число всех тракторов меньше 9. Если в каждой бригаде число колесных тракторов увеличить в 3 раза, а гусеничных — в 2 раза, то общее число колесных тракторов во всех бригадах будет на 27 больше общего числа гусеничных тракторов, а в каждой бригаде число всех тракторов превысит 20. Определить количество бригад, работающих в поле, и число гусеничных и колесных тракторов в каждой бригаде.

4. В прямоугольном треугольнике  $ABC$  длина гипотенузы  $AB$  равна  $c$ , а угол при вершине  $A$  равен  $\alpha$ . На продолжении гипотенузы  $AB$  за точку  $B$ , взята точка  $M$ , а на продолжении катета  $AC$  за точку  $C$  взята точка  $N$  таким образом, что  $BM = CN$ . Найти длину общей хорды двух окружностей, описанных около треугольников  $ABC$  и  $AMN$ .

5. Основанием пирамиды  $SABCD$  служит прямоугольник, угол между диагоналями которого равен  $\alpha$ , причем  $\alpha < \frac{\pi}{3}$ . Высота пирамиды проходит через точку пересечения диагоналей основания и равна  $h$ . Дана треугольная пирамида, имеющая ту же вершину  $S$ . Основанием ее является треугольник, одна вершина которого лежит на середине большей стороны прямоугольника  $ABCD$ , а две другие — на его диагоналях, причем проекция вершины  $S$  на плоскость основания лежит внутри этого треугольника. Найти объем треугольной пирамиды, если известно, что ее боковые грани равновелики, а боковые ребра равны.

Вариант 2 (механико-математический факультет)

1. Решить уравнение

$$x^2 \log_3(x^2) - (2x^2 + 3) \log_9(2x + 3) = 3 \log_3 \left( \frac{x}{2x + 3} \right).$$

2. Найти все  $x$  из отрезка  $0 \leq x \leq n$ , удовлетворяющие неравенству

$$\sin 2x + \sin x - \sqrt{2} \cos x < \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

3. Боковые грани четырехугольной пирамиды — равные равнобедренные треугольники, а в основании пирамиды лежит ромб, одна диагональ которого в два раза длиннее другой. Найти объем  $V$  пирамиды, если известно, что площадь боковой поверхности равна 6, а среди боковых ребер есть два ребра, составляющих тупой угол.

4. Найти все значения  $\alpha$ , при которых система неравенств имеет единственное решение

$$\begin{cases} x^2 + 4x + 3 \leq \alpha, \\ x^2 - 2x \leq 3 - 6\alpha. \end{cases}$$

5. В четырехугольник  $ABCD$  можно вписать и вокруг него можно описать окружность. Диагональ  $AC$  делит площадь четырехугольника пополам. Найти длину диагонали  $BD$ , если радиус вписанной окружности равен  $r$ , а периметр четырехугольника равен  $p$ .