Московский Государственный Университет имени М. В. Ломоносова

Дополнительное вступительное испытание по математике

ВАРИАНТ 251

1. Известно, что $x : y = 9 : 7$. Найдите $\dfrac{x+y}{x-y}$.

2. Дана последовательность $a_1, a_2, a_3, \ldots$ действительных чисел, удовлетворяющих при каждом натуральном n равенству

$$a_{n+1} = \frac{5 - a_n}{4}.$$

Пусть S_n обозначает сумму первых n членов этой последовательности: $S_n = a_1 + \ldots + a_n$. Найдите наименьшее значение n, при котором выполняется неравенство

$$|S_n - n - 8| < \frac{1}{1000}\,,$$

если известно, что $a_1 = 11$.

3. Решите неравенство

$$1 + \sqrt{\log_9(3x^2 + 8x + 6)} > \log_3(3x^2 + 8x + 6).$$

4. Решите уравнение $\sin 2x + 3\cos x = \sqrt{3}(1 + \cos 2x + \sin x)$.

5. В треугольнике ABC проведена медиана AD. Известно, что $AD : BC = \sqrt{3} : 2$ и что $\angle BAC = 45°$. Найдите угол $\angle BMC$, где M — точка пересечения медиан.

6. Положительные действительные числа a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3 удовлетворяют равенству

$$a_1 + a_2 + a_3 = b_1 + b_2 + b_3 = 3.$$

Найдите наименьшее возможное значение выражения

$$\frac{a_1^2}{a_1 + b_1} + \frac{a_2^2}{a_2 + b_2} + \frac{a_3^2}{a_3 + b_3}\,.$$

7. Дан тетраэдр $ABCD$. Рёбра AC и BD перпендикулярны прямой, проходящей через их середины. Найдите все возможные значения $AB + BC$, если известно, что $AD + DC = 1$.

Московский Государственный Университет имени М. В. Ломоносова

Дополнительное вступительное испытание по математике

ВАРИАНТ 254

1. Найдите в явном виде целое число, задающееся выражением $\left(\frac{1}{24}+\frac{1}{15}-\frac{1}{10}\right)^{-1}$.

2. Строго возрастающая последовательность $a_1, a_2, a_3, \ldots$ натуральных чисел удовлетворяет при каждом натуральном n соотношению

$$a_{n+2} \leqslant \sqrt{a_n^2+2a_n+2a_{n+1}+2}.$$

Найдите все возможные значения a_{25}, если известно, что $a_1 = 1$.

3. Решите неравенство

$$(2-2x)\cdot\log_{2\cdot 3^x-5}\sqrt{3} \leqslant 1.$$

4. Решите уравнение $\sin 3x(\cos x - \cos 2x) - \cos 3x(\sin x - \sin 2x) = 6\cos x - 3$.

5. Внутри окружности Ω радиуса 5 отмечена точка E, через которую проведены хорды AB и CD, перпендикулярные друг другу. Найдите все возможные значения расстояния от вершины F прямоугольника $AECF$ до центра O окружности Ω, если известно, что $OE = 1$.

6. Положительные действительные числа a, b, c удовлетворяют равенству $a+b+c=1$. Найдите наименьшее возможное значение выражения

$$\frac{\sqrt{(1-a)(1-b)}+\sqrt{(1-b)(1-c)}+\sqrt{(1-c)(1-a)}}{1+\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ca}}.$$

7. Дан куб с основаниями $ABCD$, $A'B'C'D'$ и боковыми рёбрами AA', BB', CC', DD'. Длина ребра этого куба равна 1. На диагонали AC основания $ABCD$ отмечена точка E так, что $AE = \frac{\sqrt{2}-1}{2}$. Найдите площадь сечения данного куба, проходящего через его центр O и перпендикулярного прямой OE.