

ВАРИАНТ 242

1. Найдите целое число, задаваемое выражением $\sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{3+\sqrt{5}}} + \sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{3-\sqrt{5}}}$.
2. Найдите сумму всех натуральных чисел n , для которых число $n^2 + 7n + 1$ является квадратом некоторого натурального числа.
3. Решите неравенство $8^{\log_{x^2-1}(x-1)} + 8^{\log_{x^2-1}(x+1)} \leq 6$.
4. Решите уравнение $\sin x + \sin 2x + \cos x = 1$.
5. Вокруг остроугольного треугольника ABC описана окружность. На дуге CA (не содержащей точку B) этой окружности отмечена некоторая точка P . Прямая, проходящая через точки B и H , где H — точка пересечения высот треугольника ABC , пересекает отрезок AP в точке Q . Найдите отношение AC к BC , если известно, что точки C, P, Q, H лежат на одной окружности.
6. Число x_0 является общим корнем многочленов $x^3 + ax^2 + bx + c$, $x^3 + bx^2 + cx + a$, $x^3 + cx^2 + ax + b$. Найдите все возможные значения x_0 , если известно, что $a > b > c$.
7. В основании пирамиды лежит трапеция $ABCD$, $AD \parallel BC$, $AD = 2BC$. Сфера радиуса 1 касается плоскости основания пирамиды и плоскостей её боковых граней ADS и BCS . Найдите отношение, в котором делит объём пирамиды плоскость ADT , где T — точка касания сферы с плоскостью BCS , если грань ADS перпендикулярна плоскости основания, а высота пирамиды равна 4.

ВАРИАНТ 243

1. Найдите целое число, задаваемое выражением $\log_{1/2} \left(\operatorname{tg} \frac{\pi}{6} \right) + \log_{1/2} \left(\cos \frac{\pi}{6} \right)$.
2. Найдите сумму всех двузначных чисел, состоящих из одной чётной цифры и одной нечётной цифры (чётные цифры — это 0, 2, 4, 6, 8, нечётные — все остальные).
3. Решите неравенство

$$\frac{4^{x^2} - 16^{4x-8}}{\sqrt{x^2 + 4x} + \sqrt{12 + 4x - x^2}} > 0.$$
4. Решите уравнение $2 \sin^3 x = \cos 3x$.
5. На стороне BC остроугольного треугольника ABC отмечена точка D , отличная от B и C . Пусть E — точка пересечения отрезка AC с окружностью, описанной около треугольника ABD , отличная от A . Пусть F — точка пересечения отрезка AB с окружностью, описанной около треугольника ACD , отличная от A . Пусть D', E', F' — точки пересечения окружности, описанной около треугольника ABC , с прямыми AD, BE, CF соответственно, отличные от точек A, B, C . Найдите угол $\angle E'D'F'$, если известно, что $\angle EDF = 30^\circ$.
6. Найдите все тройки положительных чисел x, y, z , удовлетворяющие системе уравнений

$$\begin{cases} (x^2 + xy + y^2)(y^2 + yz + z^2)(z^2 + zx + x^2) = xyz \\ (x^4 + x^2y^2 + y^4)(y^4 + y^2z^2 + z^4)(z^4 + z^2x^2 + x^4) = x^3y^3z^3 \end{cases}$$

7. В основании прямой призмы лежит ромб со стороной 3. Найдите объём призмы, если известно, что существует сфера радиуса 1, касающаяся плоскости нижнего основания, двух противоположных боковых рёбер и всех рёбер верхнего основания.