

ВАРИАНТ 231

1. Найдите наименьшее целое число, превосходящее $\frac{\sqrt{8}}{\frac{\sqrt{2}}{20} + \frac{\sqrt{2}}{23}}$.

2. Дана последовательность a_0, a_1, a_2, \dots действительных чисел. Найдите a_8 , если известно, что $a_1 = 1$ и что для любой пары индексов n, m , таких что $n \geq m \geq 0$, справедливо равенство $a_{n+m} + a_{n-m} = 2(a_n + a_m)$.

3. Решите неравенство

$$x^{\log_3 \sqrt{x}} > 9.$$

4. Решите уравнение

$$\cos 3x + 2 \sin 2x + 2 \cos x = 0.$$

5. В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты AF , BD и CE . Найдите все возможные значения разности углов $\angle A$ и $\angle B$ треугольника, если известно, что $DE : EF = BC : AC$.

6. Положительные числа a, b, c удовлетворяют соотношению

$$\frac{1}{1+a} + \frac{1}{1+b} + \frac{1}{1+c} = 1.$$

Найдите наибольшее возможное значение выражения $\frac{a}{2+a^2} + \frac{b}{2+b^2} + \frac{c}{2+c^2}$.

7. В правильной треугольной пирамиде $ABCS$ проведено сечение через ребро основания AB перпендикулярно боковому ребру CS . Найдите его площадь, если известно, что площадь основания пирамиды равна 3, а площадь каждой боковой грани равна $\sqrt{5}$.

ВАРИАНТ 233

1. Найдите целое число, задающееся выражением $\frac{3}{\sqrt[4]{16}} + \frac{5}{\sqrt[3]{27}} + \frac{11}{\sqrt{36}}$.

2. Последовательность a_1, a_2, a_3, \dots получается из последовательности натуральных чисел вычёркиванием всех полных квадратов (то есть $a_1 = 2, a_2 = 3, a_3 = 5, a_4 = 6, a_5 = 7, a_6 = 8, a_7 = 10$ и т.д.). Найдите a_{2023} .

3. Решите неравенство

$$\log_{\sqrt{3-x}}(3+x) \leq 2.$$

4. Решите уравнение

$$\cos^4 x - \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = 2 \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) \sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right).$$

5. Прямая ℓ касается окружности, описанной около треугольника ABC , в точке A . Известно, что $AB > AC$ и что $AC = 1$. На стороне AB отмечена точка D так, что $AD = AC$. Прямая, проходящая через точку D и через центр окружности, вписанной в треугольник ABC , пересекает прямую ℓ в точке E . Найдите длину отрезка AE .

6. Положительные числа a, b, c удовлетворяют соотношению

$$a^2 + b^2 + c^2 = 1.$$

Найдите наибольшее возможное значение выражения $ab + bc\sqrt{3}$.

7. Найдите объём правильной четырёхугольной пирамиды со стороной основания равной 1, если известно, что плоские углы при вершине равны углам наклона боковых рёбер к плоскости основания.