Задачи устного экзамена, 2000 год

1. Решить в целых числах уравнение x2=2(xy-y2-y).
2. Вычислить $\log_{\sqrt{2}+\sqrt{3}}(4\sqrt{2}+3\sqrt{3})\cdot\log_{\sqrt{6}+1}(\sqrt{3}-\sqrt{2})+\log_{2\sqrt{6}+7}(2\sqrt{6}+5)$.
3. Что больше: lg7.lg13 или 1 ?
4. Вычислить sin α, если известно, что sin(α/2)+cos(α/2)=1,4.
5. Найти область значений функции f(x)=sin(cos(cosx2)).
6. Найти наибольшее значение выражения cosx+cosy при условии, что x+y= $\pi/2$.
7. На координатной плоскости Oxy изобразить множество, координаты точек которого удовлетворят неравенству logy|sinx|$\geq$0.
8. Решить уравнение $\sqrt{\lg(-x)} = \lg\sqrt{x^2}$.
9. Решить уравнение $\sqrt{1-x^2} = 4x^3 - 3x$.
10. Решить уравнение 4.33x+1 + 4 = 5.29x.
11. Решить уравнение x3+x2+x = -1/3.
12. Решить систему уравнений $\begin{cases} x+y+z=4 \\ 2xy-z^2=16 \end{cases}$.
13. Доказать, что для неотрицательных чисел a,b и c имеет место неравенство $\frac{a+b+c}{3} \leq \sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2}{3}}$.
14. Наибольшей стороне BC=a треугольника ABC принадлежит точка M. Найти наименьшее расстояние между центрами окружностей, описанных около треугольников ABM и ACM.
15. В равнобедренной трапеции средняя линия равна a, а диагонали взаимно перпендикулярны. Найти площадь трапеции.
16. В треугольнике даны две стороны a и b (a>b). Найти третью сторону, если известно, что a+ha$\leq$b+hb, где ha и hb - высоты, опущенные на стороны a и b соответственно.
17. Пусть R, r и S соответственно радиусы описанной, вписанной окружностей и площадь прямоугольного треугольника. Известно, что R+r= $\sqrt{2S}$. Найти острые углы этого треугольника.
18. В окружность радиуса 1 вписан правильный четырнадцатиугольник. Найти сумму квадратов расстояний от произвольной точки окружности до всех вершин этого четырнадцатиугольника.
19. Дан параллелепипед ABCDA1B1C1D1 (AA1||BB1||CC1||DD1). Найти, в каком отношении две плоскости, проходящие через точки A1, B, D и B1, C, D1 соответственно, делят диагональ AC1.