

### 1999 г. Задачи устного экзамена

1. Доказать, что число  $n^3 - n + 3$  составное для любого натурального  $n > 1$ .
2. Целое число кратно 7 и при делении на 4 дает в остатке 3. Найти остаток от деления этого числа на 28.
3. Доказать, что если  $a + b + c$  делится нацело на 6, то и  $a^3 + b^3 + c^3$  делится нацело на 6 ( $a, b, c$  - целые числа).
4. Решить в целых числах уравнение  $9x = 4y + 1$ .
5. Сравнить числа  $a$  и  $b$ , если известно, что  $5(a - 1) = a^2 + b$ .
6. Имеет ли смысл выражение  $\sqrt{\log_2 3 - \log_5 11}$ ?
7. Изобразить на плоскости геометрическое место точек, удовлетворяющих равенству  $|y - x| + |y - x^2| = 2$ .
8. Построить график функции  $y(x) = \arcsin(|\sin x|)$ .
9. Решить уравнение  $\sin x \cdot \sin 3x = 2\cos 2x - \cos 2x$ .
10. Решить уравнение  $\frac{1}{2^{\sin^2 x}} + \frac{1}{2^{\cos^2 x}} = \sin x + \cos x$ .
11. При каких  $a$  уравнение  $\sin x + \cos x + \sin x \cdot \cos x = a$  имеет решения?
12. Найти наибольшее и наименьшее значение функции  $f(x) = \arcsin x \cdot \arccos x + 1$ .
13. Решить неравенство  $\log_2(\sqrt{x} + 1) \cdot \log_3(x + 2) \leq 1$ .
14. В треугольнике все три высоты меньше 1. Доказать, что радиус вписанной окружности меньше  $1/3$ .
15. Доказать, что в любом треугольнике сумма длин всех трех медиан меньше периметра треугольника, но больше  $3/4$  периметра треугольника.
16. В треугольнике ABC проведены высота СК и медиана СМ. Известно, что  $\angle АСК = \angle ВСМ$  и  $\angle КСМ \neq 0$ . Найти величину угла АСВ.
17. Построить параллелограмм по диагоналям и углу параллелограмма.
18. Построить треугольник по двум углам и биссектрисе третьего угла.