Задание письменного тура Двухтуровой олимпиады факультета ВМиК МГУ по математике 1998 года

1. Решить неравенство $\dfrac{1}{\log_2 \dfrac{4}{x}} \ge \log_2 \dfrac{x}{8} - 1.$
2. Решить неравенство $\left|\sqrt{x-4} - 3\right| > \left|\sqrt{9-x} - 2\right| + 1.$
3. Решить уравнение tg$\,x \cdot \sqrt{\sin x - 2\cos x - 1} = 0.$
4. В четырехугольник ABCD можно вписать окружность. Пусть К -zточка пересечения его диагоналей. Известно, что AB > BC > KC, BK = 4+, а периметр и площадь треугольника BKC равны соответственно 14 и 7. Найти DC.
5. Найти все значения параметра a, при которых уравнение $2^{\frac{2x}{1+x^2}} + a \cdot \cos\left(\dfrac{x^2-1}{x}\right) + a^2 - \dfrac{5}{4} = 0$ имеет единственное решение.
6. Двугранный угол, образованный полуплоскостями α и β, равен $\dfrac{\pi}{3}$. Внутри этого угла расположен треугольник ABC. Ортогональные проекции треугольника ABC на полуплоскости и суть треугольники AB1C1 и AB2C2 соответственно (B1 и B2 - проекции точки B, C1 и C2 - проекции точки C). Известно, что AB = $3\sqrt{25-4\sqrt{3}}$, AC = $\sqrt{19-4\sqrt{3}}$, AB1 = $9\sqrt{2}$, AB2 = $6\sqrt{3}$, AC1 > AC2, каждый из углов B1AC1 и B2AC2 равен $\dfrac{\pi}{12}$. Найти BC.

Ответы: 1. $x \in (0;4) \cup \{8\}.$ 2. $x \in \left[4; \dfrac{13}{2}\right).$ 3. $x = (2k+1)\pi, k \in Z,$ $x = \pi + \arccos\dfrac{1}{\sqrt{5}} - \arcsin\dfrac{1}{\sqrt{5}} + 2\pi n, n \in Z.$ 4.DC=6. 5. a=-3/2 6. $BC = \sqrt{148 - 34\sqrt{3}}.$