

**Московский государственный университет имени
М. В. Ломоносова**

Олимпиада «Ломоносов», информатика, 2013 год, вариант 1.

Задача 1. Дана следующая позиционная система счисления: цифра в самом младшем (нулевом) разряде может принимать значения $A, 0, 1$, где буква A соответствует -1 . Цифра в первом разряде может принимать значения $B, A, 0, 1, 2$, где буква A соответствует -1 , а буква B соответствует -2 . Цифра во втором разряде может принимать значения $C, B, A, 0, 1, 2, 3$, цифра в третьем разряде может принимать значения $D, C, B, A, 0, 1, 2, 3, 4$ и т. д.

В этой системе счисления десятичные числа от -6 до 6 представляются как $B0, B1, AA, A0, A1, A, 0, 1, 1A, 10, 11, 2A, 20$.

Запишите в десятичном виде число $4C21$. Запишите в данной системе счисления десятичное число 85 . Сколько знаков в данной системе счисления будет у числа 69123 . Ответ обоснуйте.

Задача 2. На любом языке программирования напишите следующие алгоритмы работы с числами, записанными в системе счисления, описанной в предыдущем задании.

- Смены знака числа.
- Прибавления единицы к числу.

Задача 3. Сколько заключительных нулей в записи числа $2011!$ в системе счисления, описанной в первой задаче. Ответ обоснуйте.

Задача 4. Рассмотрим булевскую функцию $f(x, y)$ от булевских аргументов x и y . Построим таблицу вида

x	y	$f(x, y)$
0	0	1
0	1	0
1	0	1
1	1	0

Все возможные значения переменных-аргументов функции в приведенной выше таблице упорядочены лексикографически. Теперь выпишем в строку столбец со значением функции и получим число 1010 (двоичное) или A (шестнадцатеричное). Таким образом, любая функция от двух аргументов может быть однозначно представлена 4-битным двоичным числом. Функция от трех аргументов представляется 8-битным двоичным числом, а функция от n аргументов — двоичным числом длиной 2^n бит.

У функции из примера переменная x является фиктивной, так как для любого значения оставшейся переменной y выполняется $f(0, y) = f(1, y)$.

Дана запись функции $f(a, b, c, d, e)$ от пяти аргументов в виде 32-битного шестнадцатеричного числа 50055f0f. Определите, какая переменная является фиктивной.

Задача 5. Рассмотрим следующий алгоритм сжатия данных. Данные рассматриваются как последовательность байт. Размер байта считается равным 8 бит. Выбирается значение байта (число в интервале от 0 до 255), которое реже всего встречается во входном файле. Если таких чисел несколько, выбирается любое из них. Это число M объявляется маркером длины и записывается в выходной файл. Далее при чтении из входной последовательности одинаковые идущие подряд байты заменяются на специальную последовательность. А именно, если во входном файле находится последовательность не более чем из трех одинаковых байтов, она записывается в выходной файл как есть. Последовательность из байтов, равных значению байта-маркера длины, в количестве L от 1 до 256, записывается в виде трех байт $M M L - 1$. Если во входном файле находится последовательность одинаковых байтов B в количестве N от 4 до 259, она записывается в виде трех байт $M B N - 4$.

Пусть известен размер входного файла, равный 1037 байтам. Каковы минимальный и максимальный размер файла после сжатия.

Задача 6. Универсальная система кодирования Юникод представляет собой набор графических символов и способ их кодирования для компьютерной обработки текстовых данных. В Юникоде определено 1,114,112 кодовых позиций, кодируемых номерами от 0 до 10FFFF (шестн.). Кодовые позиции обозначаются U+NUM, где NUM - номер кодовой позиции, например, U+0030 (символ '0').

Одной из кодировок, используемых для хранения данных в Юникоде, является кодировка UTF-8. В зависимости от значения кодовой позиции она кодируется переменным числом байт, как показано на таблице.

U+0000	U+007F	1	0xxxxxxx			
U+0080	U+07FF	2	110xxxxx	10xxxxxx		
U+0800	U+FFFF	3	1110xxxx	10xxxxxx	10xxxxxx	
U+10000	U+1FFFFF	4	11110xxx	10xxxxxx	10xxxxxx	10xxxxxx

Например, кодовая позиция U+20AC кодируется тремя байтами E2 82 AC.

Кодовая позиция U+0031 может быть формально закодирована как 31, C0 B1, E0 80 B1 и т. д. Из этих вариантов только 31 является корректным, то есть кодовые позиции должны кодироваться минимальным числом байт.

Русские буквы (кроме ё) занимают кодовые позиции U+0410 - U+042F (заглавные) и U+0430 - U+044F (строчные) и упорядочены по алфавиту.

Предположим, что в файле в кодировке UTF-8 хранится текст, содержащий только русские буквы длины 160 букв.

Каков размер файла в байтах? Какие два байта в сумме встречаются в файле не реже, чем любые другие два байта, независимо от текста?

Задача 7. Дана последовательность чисел. что это за последовательность (то есть каким свойством или свойствами, не зависящими от системы счисления, обладают все элементы этой последовательности)? Ответ обоснуйте.

65 104 113 115 124 131 133 142 146 155

Задача 8. Электронные часы для отображения текущего времени в формате часы:минуты используют четыре семисегментных индикатора. Вид одного семисегментного индикатора показан ниже.

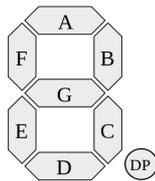


Таблица показывает, какие секции горят при отображении каждой из цифр.

Цифра	a	b	c	d	e	f	g
0	+	+	+	+	+	+	-
1	-	+	+	-	-	-	-
2	+	+	-	+	+	-	+
3	+	+	+	+	-	-	+
4	-	+	+	-	-	+	+
5	+	-	+	+	-	+	+
6	+	-	+	+	+	+	+
7	+	+	+	-	-	-	-
8	+	+	+	+	+	+	+
9	+	+	+	+	-	+	+

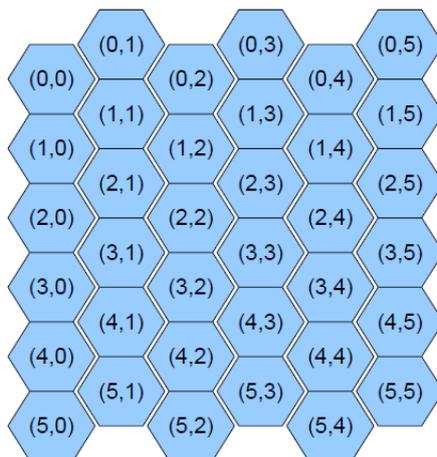
Каждая секция каждого индикатора имеет ограниченный ресурс, равный 2500 переключений, то есть на 2501 переключении индикатор ломается. В момент времени 00:00 электронные часы включаются. В какой момент времени сломается первая секция в индикаторе единиц секунд? В какой момент времени сломается последняя секция в индикаторе десятков секунд.

Задача 9. Функция P определяется для неотрицательных целых чисел m и n следующим образом:

$$P(m, n) = \begin{cases} n + 1, & \text{если } m = 0; \\ P(m - 1, 1), & \text{если } m > 0 \text{ и } n = 0; \\ P(m - 1, P(m, n - 1)), & \text{если } m > 0 \text{ и } n > 0. \end{cases}$$

Напишите определение для функции $Q(a)$, являющейся обратной к функции $P(b, b)$, то есть $Q(a)$ — это такое целое число b , что $P(b, b) \leq a < P(b + 1, b + 1)$, которое было бы корректным для любых целых a , удовлетворяющих условию $0 < a < 100000$.

Задача 10. Во многих компьютерных играх используется игровое поле, замощенное шестиугольниками. Каждая клетка поля идентифицируется парой координат (r, c) как показано ниже.



Например, у клетки $(3, 1)$ шесть соседей — клетки с координатами $(2, 0)$, $(3, 0)$, $(2, 1)$, $(4, 1)$, $(2, 2)$, $(3, 2)$. Из клетки в соседние клетки можно попасть за один ход. Расстояние между двумя клетками — это минимальное число ходов, за которое можно из одной клетки попасть в другую клетку.

Пусть даны две клетки с координатами (r_1, c_1) и (r_2, c_2) . Напишите формулу для расстояния между этими клетками.