

Задача 1.

Ответ: 2 меbibита в секунду.

Решение: Обозначим за v искомую скорость в Мибит/с, за x объем графического файла в представлении Base64 в меbibитах, тогда $\frac{3x}{4}$ — исходный размер файла; $\frac{x}{2v}$ — время доставки первой половины файла по электронной почте; $\frac{x}{2(v+2)}$ — время доставки второй половины файла по электронной почте; $\frac{3x}{8(2v-3)}$ — четверть времени скачивания исходного файла из Википедии; получаем уравнение: $\frac{x}{2v} + \frac{x}{2(v+2)} = \frac{3x}{8(2v-3)}$ так как по смыслу задачи $x > 0, v > 1,5$ переходим к уравнению: $13v^2 - 14v - 24 = 0$. Подходит один из корней $v = 2$. Корень $v = -\frac{12}{13}$ отбрасываем.

Задача 2.

Ответ: 11 или 12 бит (4020 различных сообщений).

Решение. Пронумеруем каждый горшок с разными растениями цифрами от 1 до 5 и получим следующую задачу: необходимо определить количество шестизначных чисел, которые можно составить из цифр 1122334455 так, чтобы две одинаковые цифры не стояли рядом. Так как число шестизначное, а различных цифр 5, то в состав числа может входить одна, две или три пары одинаковых чисел.

Пусть в число входит одна пара одинаковых чисел. Такую пару из 5 пар можно выбрать $C_5^1 = 5$ способами. На оставшиеся 4 места ставим любые числа. Всего шестизначных чисел из 4-х разных и 2-х одинаковых чисел существует $6!/2! = 360$. Из них две одинаковые цифры стоят подряд у $5 * 4! = 120$ чисел. Итого шестизначных чисел с одной парой повторяющихся чисел можно составить $C_5^1(6!/2! - 5 * 4!) = 5 * (360 - 120) = 1200$.

Пусть в число входит две пары одинаковых чисел. Такие 2 пары из 5 пар можно выбрать $C_5^2 = 10$ способами. И еще 2 числа из оставшихся 3 можно выбрать $C_3^2 = 3$ способами. Всего шестизначных чисел из 2-х разных и 2-х пар с одинаковыми числами существует $6!/(2! * 2!) = 180$. Из них две одинаковые цифры стоят подряд у $2 * 5 * 4!/2! = 120$ чисел: 2 способа выбрать одну пару из двух и $5 * 4!/2!$ способов расставить 6 чисел, если одна пара чисел следует подряд и еще 2 числа повторяются. Однако в 4! случаях сразу 2 пары присутствуют в числе, следовательно, количество этих чисел отнималось дважды. Итого шестизначных чисел с двумя парами повторяющихся чисел можно составить $C_5^2 C_3^2 (6!/(2! * 2!) - 5 * 4!/2! + 4!) = 10 * 3(180 - 120 + 24) = 2520$.

Пусть в число входит три пары одинаковых чисел. Такие 3 пары из 5 пар можно выбрать $C_5^3 = 10$ способами. Всего шестизначных чисел, из 3-х пар с одинаковыми числами существует $6!/(2! * 2! * 2!) = 90$. Из них две одинаковые цифры стоят подряд у $3 * 5 * 4!/(2! * 2!) = 90$ чисел: 3 способа выбрать одну пару из трех и $5 * 4!/(2! * 2!)$ способов расставить 6 чисел, если одна пара чисел следует подряд и еще 2 числа повторяются и 2 числа повторяются. Однако в $3 * (4!/2!)$ случаях сразу 2 пары присутствуют в числе, следовательно, количество этих чисел отнималось дважды. И в 3! случаях сразу 3 пары присутствует. Итого шестизначных чисел с тремя парами повторяющихся чисел можно составить $C_5^3(6!/(2! * 2! * 2!) - 5 * 4!/(2! * 2!) + 3 * 4!/2! - 3!) = 10 * (90 - 90 + 36 - 6) = 300$.

Ответ: $1200 + 2520 + 300 = 4020$.

Задача 3.

Ответ: в большом и маленьком пузырьке йода нет, в среднем пузырьке йод есть.

Решение. Обозначим высказывания: A — в большом пузырьке йод, B — в маленьком пузырьке йод, C — в среднем пузырьке йод. Тогда на записках написаны формулы $A \vee B \wedge \neg C, \neg A \wedge B, A \wedge B \wedge C$.

Предположим, что все записки одновременно истинны, то есть $(A \vee B \wedge \neg C) \wedge (\neg A \wedge B) \wedge (A \wedge B \wedge C) = 1$. Это невозможно.

Предположим, что все записки одновременно ложны, то есть $\neg(A \vee B \wedge \neg C) \wedge \neg(\neg A \wedge B) \wedge \neg(A \wedge B \wedge C) = 1$. Отсюда $\neg A \wedge (\neg B \vee C) \wedge (A \vee \neg B) \wedge (\neg A \vee \neg B \vee \neg C) = 1$. Отсюда $\neg A = 1$, $\neg B = 1$. Так как $A \vee B \vee C = 1$, то $C = 1$.

Задача 4.

Ответ: JIN6HIJ.

Решение. В системе счисления с основанием 20 число делится на 19 тогда и только тогда, когда сумма его цифр делится на 19 (участники олимпиады должны это утверждение обосновывать). Поскольку каждую цифру можно использовать не более двух раз, палиндром, очевидно, будет иметь вид JINxHIJ, где на месте x стоит такая цифра, чтобы сумма цифр числа делилась на 19. Эта цифра — 6, так как $0 + -1 + -2 + x + -2 + -1 + 0 = 0$ (остатки от деления на 19 всех цифр числа).

Задача 5.

Ответ:

14 2 -2
3 9 -1
9 -5 -1

Решение: После выполнения операций по копированию формул получается следующая таблица:

=SUM(A2:C\$3)	=SUM(B2:D\$3)	=SUM(C2:E\$3)
=SUM(A3:C\$3)	=\$A2+2*A2	=SUM(C3:E\$3)
A3	B3	=\$A3+2*B3

Выражая формулы в ячейках через C1 и C2 получаем таблицу:

=11*A3+17*B3	=8*A3+14*B3	=2*A3+4*B3
=2*A3+3*B3	=6*A3+9*B3	=A3+2*B3
A3	B3	=A3+2*B3

Таким образом, $11 \cdot A3 + 17 \cdot B3 = 14$, $2 \cdot A3 + 4 \cdot B3 = -2$, отсюда $A3 = 9$, $B3 = -5$.

Задача 6.

Ответ. Ответом является любая из следующих последовательностей:

1 2 5 6 4 3; 1 2 6 4 5 3; 1 2 6 5 3 4; 1 3 4 6 5 2; 1 3 5 4 6 2
1 3 5 6 2 4; 1 3 6 2 5 4; 1 3 6 4 2 5; 1 4 2 6 5 3; 1 4 3 5 6 2
1 4 3 6 2 5; 1 4 5 2 6 3; 1 4 5 3 2 6; 1 4 6 2 3 5; 1 5 2 4 6 3
1 5 2 6 3 4; 1 5 3 2 6 4; 1 5 3 4 2 6; 1 5 4 2 3 6; 1 6 2 3 5 4
1 6 2 4 3 5; 1 6 3 2 4 5; 2 1 4 6 5 3; 2 1 5 4 6 3; 2 1 5 6 3 4
2 1 6 3 5 4; 2 1 6 4 3 5; 2 3 1 6 5 4; 2 3 4 5 6 1; 2 3 4 6 1 5
2 3 5 1 6 4; 2 3 5 4 1 6; 2 3 6 1 4 5; 2 4 1 5 6 3; 2 4 1 6 3 5
2 4 3 1 6 5; 2 4 3 5 1 6; 2 4 5 1 3 6; 2 5 1 3 6 4; 2 5 1 4 3 6
2 5 3 1 4 6; 2 6 1 3 4 5; 3 1 2 6 5 4; 3 1 4 5 6 2; 3 1 4 6 2 5
3 1 5 2 6 4; 3 1 5 4 2 6; 3 1 6 2 4 5; 3 2 1 5 6 4; 3 2 1 6 4 5
3 2 4 1 6 5; 3 2 4 5 1 6; 3 2 5 1 4 6; 3 4 1 2 6 5; 3 4 1 5 2 6
3 4 2 1 5 6; 3 5 1 2 4 6; 4 1 2 5 6 3; 4 1 2 6 3 5; 4 1 3 2 6 5
4 1 3 5 2 6; 4 1 5 2 3 6; 4 2 1 3 6 5; 4 2 1 5 3 6; 4 2 3 1 5 6
4 3 1 2 5 6; 5 1 2 3 6 4; 5 1 2 4 3 6; 5 1 3 2 4 6; 5 2 1 3 4 6
6 1 2 3 4 5

Всего таких последовательностей 71 (из 720 всех возможных перестановок).

В качестве обоснования возможно моделирование работы алгоритма.

Задача 7.

Идея решения.

Данное решение работает за линейное время от длины массива. Все решения, работающие за большее время, в том числе использующие сортировку, считать неверными.

Предположим, что нужно разбить массив на две части так, чтобы в начале массива шли элементы, удовлетворяющие некоторому свойству, а в конце — все остальные. Эту задачу решает шаг разбиения массива алгоритма быстрой сортировки:

```
int a[N];
//...
i = 0; j = N - 1;
while (i < j) {
    while (i < j && is_prop(a[i])) ++i;
    while (i < j && !is_prop(a[j])) --j;
    swap(a[i++], a[j--]);
}
```

Дважды применяя алгоритм разбиения получаем следующую программу.

```
i = 0; j = N - 1;
while (i < j) {
    while (i < j && (a[i] % 3 == 2 || a[i] % 3 == 1)) ++i;
    while (i < j && (a[j] % 3 != 2 && a[j] % 3 != 1)) --j;
    if (i < j) swap(a[i++], a[j--]);
}
if (j < 0 || (a[j] % 3 == 2 || a[j] % 3 == 1)) ++j;
i = 0;
while (i < j) {
    while (i < j && a[i] % 3 == 2) ++i;
    while (i < j && a[j] % 3 != 2) --j;
    if (i < j) swap(a[i++], a[j--]);
}
```

Задача 8.

Ответ.

```
I=S(I[1,1],I[1,1])
N3=S(N,I[3,3])
A=R(I,N3)
SUMM=S(A,I[2,3],I[3,3])
```