Олимпиада «Ломоносов — 2010» по математике.

Вариант 1.

1. Решите неравенство

$$(\sqrt{3}-\sqrt{2})^{(\log_2 3)^{4-x^2}} \le (\sqrt{3}+\sqrt{2})^{-(\log_3 2)^{2x-1}}.$$

2. На основании AC равнобедренного треугольника ABC взята точка E, а на боковых сторонах AB и BC точки D и F соответственно так, что $DE||BC$ и $EF||AB$. Какую часть площади треугольника ABC занимает площадь треугольника DEF, если $BF:EF=2:3$?

3. Два вкладчика вложили деньги в общее дело. После этого один из них добавил еще 1 млн р., в результате чего его доля в общем деле увеличилась на 0.04, а когда он добавил еще 1 млн р., его доля увеличилась еще на 0.02. Сколько денег ему нужно добавить еще, чтобы увеличить свою долю еще на 0.04?

4. Решите неравенство

$$\frac{1}{\sqrt{-x-2}}-\frac{1}{\sqrt{x+4}} \le 1+\frac{1}{\sqrt{(x+4)(-x-2)}}.$$

5. Числа 54 и 128 являются членами геометрической прогрессии. Найдите все натуральные числа, которые могут встретиться в этой прогрессии.

6. Проекции некоторой кривой в координатном пространстве на плоскости Oxz и Oyz удовлетворяют уравнениям $5x+\cos z=0$ и $z=\operatorname{arctg}\sqrt{y-3}$ соответственно. Найдите функцию $y=f(x)$, график которой состоит из тех и только тех точек, которые могли бы при этих условиях служить проекциями точек той же кривой на плоскость Oxy?

7. Найдите все значения a, при каждом из которых система

$$\begin{cases} 25^x-13\cdot 5^x+a<0 \\ 12\sin^4\pi x-\cos 4\pi x=11 \end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение.

8. На ребре AS треугольной пирамиды $SABC$ отмечены такие точки M и N, что $AM=MN=NS$. Найдите площадь треугольника NBC, если площади треугольников ABC, MBC и SBC равны 1, 2 и $\sqrt{37}$ соответственно.

9. На доске написан квадратный трехчлен $x^2+9x+47=0$. Таня (по своему усмотрению) увеличивает или уменьшает на 1 коэффициент при x, после чего Ваня увеличивает или уменьшает на фиксированное число m свободный член, а далее эти действия повторяются. Как только написанный на доске многочлен имеет целый корень, Ваня получает оценку "пять". Может ли он обеспечить себе "пятерку" при любых действиях Тани, если $a)m=2$; $b)m=3$?

10. Диагонали трапеции $ABCD$ с основаниями $AD=3$ и $BC=1$ пересекаются в точке O. Две окружности, пересекающие основание BC в точках K и L соответственно, касаются друг друга в точке O, а прямой AD — в точках A и D соответственно. Найдите AK^2+DL^2.