ОТВЕТЫ И РЕШЕНИЯ К ЗАДАЧАМ 2013 ГОДА

Задача 1.

Старший коэффициент квадратного трехчлена $f(x)$ равен 2. Один из его корней равен 5/2. Найдите второй корень, если известно, что $f(0) = 3$. **Ответ:** 3/5

Старший коэффициент квадратного трехчлена $f(x)$ равен 3. Один из его корней равен 4/3. Найдите второй корень, если известно, что $f(0) = -2$. **Ответ:** $-1/2$

Старший коэффициент квадратного трехчлена $f(x)$ равен -2. Один из его корней равен 3/2. Найдите второй корень, если известно, что $f(0) = 1$. **Ответ:** $-1/3$

Старший коэффициент квадратного трехчлена $f(x)$ равен -3. Один из его корней равен 7/3. Найдите второй корень, если известно, что $f(0) = 4$. **Ответ:** $-4/7$

Задача 2.

Вычислите $\log_{12} 3 \cdot \log_9 12$. **Ответ:** 1/2

Вычислите $\log_8 10 \cdot \log_{10} 4$. **Ответ:** 2/3

Вычислите $\log_5 27 \cdot \log_9 5$. **Ответ:** 3/2

Вычислите $\log_{16} 6 \cdot \log_6 8$. **Ответ:** 3/4

Задача 3.

Решите неравенство $9\left(1+5^{1-2x}\right)^{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}\left(5^{2x}+5\right)^{\frac{1}{2}} \geqslant 6^{\frac{1}{2}} \cdot 5^{\frac{x}{2}}$. **Ответ:** $0 \leqslant x \leqslant 1$

Решите неравенство $15\left(4+4^{-2x}\right)^{-\frac{1}{2}} - \left(4^{1+2x}+1\right)^{\frac{1}{2}} \geqslant 20^{\frac{1}{2}} \cdot 4^{\frac{x}{2}}$. **Ответ:** $-1 \leqslant x \leqslant 0$

Решите неравенство $\frac{9}{2}\left(1+2^{1-2x}\right)^{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}\left(2^{2x}+2\right)^{\frac{1}{2}} \geqslant 3^{\frac{1}{2}} \cdot 2^{\frac{x}{2}}$. **Ответ:** $0 \leqslant x \leqslant 1$

Решите неравенство $12\left(3+3^{-2x}\right)^{-\frac{1}{2}} - \left(3^{1+2x}+1\right)^{\frac{1}{2}} \geqslant 4 \cdot 3^{\frac{x}{2}}$. **Ответ:** $-1 \leqslant x \leqslant 0$

Задача 4.

Решите уравнение $\frac{\sin 5x}{\sin x} - \frac{\cos 5x}{\cos x} = \frac{\sin x}{\sin 5x} - \frac{\cos x}{\cos 5x}$. **Ответ:** $x = \frac{k\pi}{8}, \frac{n\pi}{6}, \quad k \in \mathbb{Z}\backslash 4\mathbb{Z}, \ n \in \mathbb{Z}\backslash 3\mathbb{Z}$

Решите уравнение $\frac{\cos 3x}{\sin 2x} + \frac{\sin 3x}{\cos 2x} = \frac{\sin 2x}{\cos 3x} + \frac{\cos 2x}{\sin 3x}$. **Ответ:** $x = \frac{k\pi}{10}, \quad k \in \mathbb{Z}\backslash(2\mathbb{Z} \cup 5\mathbb{Z})$

Решите уравнение $\dfrac{\sin 3x}{\sin x}+\dfrac{\cos 3x}{\cos x}=\dfrac{\sin x}{\sin 3x}+\dfrac{\cos x}{\cos 3x}$. **Ответ:** $x=\dfrac{k\pi}{8},\quad k\in\mathbb{Z}\backslash 4\mathbb{Z}$

Решите уравнение $\dfrac{\cos 4x}{\sin 3x}-\dfrac{\sin 4x}{\cos 3x}=\dfrac{\sin 3x}{\cos 4x}-\dfrac{\cos 3x}{\sin 4x}$. **Ответ:** $x=\dfrac{k\pi}{14},\quad k\in\mathbb{Z}\backslash 7\mathbb{Z}$

Задача 5.

В 14:00 из села Верхнее вниз по течению реки в сторону села Нижнее отправился катер "Быстрый". Когда до Нижнего оставалось плыть 500 метров, ему навстречу из Нижнего вышел катер "Смелый". В этот же самый момент "Быстрый", не желая встречи со "Смелым", развернулся и пошел обратно к Верхнему. В 14:14, когда расстояние по реке от "Быстрого" до Верхнего сравнялось с расстоянием по реке от "Смелого" до "Быстрого", на "Смелом" осознали, что они идут с "Быстрым" на одинаковой скорости, развернулись и направились обратно к Нижнему. В исходные пункты катера вернулись одновременно в 14:18. Найдите расстояние по реке между Верхним и Нижним, если известно, что оба катера движутся равномерно и с одинаковой собственной скоростью. **Ответ:** 2 км

От биостанции до границы заповедника вверх по реке ровно 14 км. В 7:00 браконьеры вошли на катере в заповедник и направились в сторону биостанции. Через некоторое время им навстречу с биостанции вышел катер рыбинспекции. Браконьеры тут же развернулись и направились обратно к границе заповедника. В 7:38, когда браконьеры оказались ровно посередине между рыбинспекторами и границей, рыбинспекторы осознали, что они идут с браконьерами на одинаковой скорости, развернулись и направились обратно на биостанцию. До биостанции они добрались ровно в тот момент, когда браконьеры выехали за пределы заповедника — в 7:50. Найдите наименьшее расстояние, на котором находились браконьеры и рыбинспекторы, если известно, что оба катера движутся равномерно и с одинаковой собственной скоростью. **Ответ:** 4 км

В 15:00 из пункта А, двигаясь против течения реки в сторону пункта Б, вышел катер "Первый", а навстречу ему из пункта Б отправился катер "Второй". В 15:12 путь, пройденный "Вторым", стал равен расстоянию между катерами. В этот момент "Первый" развернулся и пошел обратно к пункту А. "Второй" продолжал двигаться за "Первым" до тех пор, пока "Первый" не прибыл в пункт А. В этот момент расстояние от "Второго" до А равнялось 1,6 км. Развернувшись, "Второй" сразу же отправился обратно в пункт Б, куда и прибыл в 15:49. Чему равно расстояние по реке между пунктами А и Б? **Ответ:** 4,4 км

От биостанции до границы заповедника вниз по реке ровно 8 км. В 8:00 браконьеры вошли на катере в заповедник и направились в сторону биостанции. В это же время им навстречу с биостанции вышел катер с рыбинспекторами. Через 6 минут, когда рыбинспекторы были ровно посередине между биостанцией и браконьерами, браконьеры заметили катер рыбинспекции, тут же развернулись и направились обратно к границе заповедника. Когда браконьеры достигли границы, рыбинспекторы с чувством выполненного долга развернулись и отправились обратно на биостанцию, куда прибыли в 08:25. Найдите наименьшее расстояние, на котором находились браконьеры от рыбинспекторов, если известно, что оба катера движутся равномерно и с одинаковой собственной скоростью. **Ответ:** 3 км

Задача 6.

Трапеция $ABCD$ вписана в окружность радиуса R и описана около окружности радиуса r. Найдите r, если $R = 12$, а косинус угла между диагональю AC и основанием AD равен 3/4.

Ответ: 7

Трапеция $ABCD$ вписана в окружность радиуса R и описана около окружности радиуса r, причем $R = 2r$. Найдите среднюю линию трапеции, если диагональ AC равна 4.

Ответ: $\sqrt{17} - 1$

Трапеция $KLMN$ вписана в окружность радиуса R и описана около окружности радиуса r. Найдите r, если $R = 20$, а косинус угла между диагональю KM и основанием KN равен 4/5.

Ответ: 9

Трапеция $KLMN$ вписана в окружность радиуса R и описана около окружности радиуса r, причем $R = \frac{3}{2}r$. Найдите среднюю линию трапеции, если диагональ KM равна 3.

Ответ: $\sqrt{10} - 1$

Задача 7.

В основании прямой призмы $ABCA'B'C'$ лежит прямоугольный треугольник ABC, такой что $AC = BC = 1$. На ребре $A'B'$ верхнего основания (параллельном AB) отмечена точка D, так что $A'D : DB' = 1 : 2$. Найдите радиус сферы, вписанной в тетраэдр $ABC'D$, если высота призмы равна 1.

Ответ: $\left(1 + \sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{\frac{2}{3}}\right)^{-1}$

В основании прямой призмы $ABCA'B'C'$ лежит прямоугольный треугольник ABC, такой что $AC = BC = 1$. На ребре $A'C'$ верхнего основания (параллельном AC) отмечена точка D, так что $A'D : DC' = 2 : 1$. Найдите радиус сферы, вписанной в тетраэдр $AB'CD$, если высота призмы равна 1.

Ответ: $\left(1 + \sqrt{2} + \frac{\sqrt{11}}{3} + \frac{\sqrt{14}}{3}\right)^{-1}$

В основании прямой призмы $KLMK'L'M'$ лежит прямоугольный треугольник KLM, такой что $KM = LM = 1$. На ребре $K'L'$ верхнего основания (параллельном KL) отмечена точка N, так что $K'N : NL' = 1 : 3$. Найдите радиус сферы, вписанной в тетраэдр $KLM'N$, если высота призмы равна 1.

Ответ: $\left(\sqrt{2} + \sqrt{3} + \frac{\sqrt{11}}{4} + \frac{\sqrt{19}}{4}\right)^{-1}$

В основании прямой призмы $KLMK'L'M'$ лежит прямоугольный треугольник KLM, такой что $KM = LM = 1$. На ребре $K'M'$ верхнего основания (параллельном KM) отмечена точка N, так что $K'N : NM' = 3 : 1$. Найдите радиус сферы, вписанной в тетраэдр $KL'MN$, если высота призмы равна 1.

Ответ: $\left(1 + \frac{7+\sqrt{13}}{2\sqrt{2}}\right)^{-1}$

Задача 8.

Найдите все значения параметра a, при которых уравнение $\sin\left(x + \dfrac{a}{x}\right) = x + 1$ имеет бесконечно много решений.

Ответ: $a \neq 0$

Найдите все значения параметра a, при которых уравнение $\sin\Big(x - a\ln|x|\Big) = x + 1$ имеет бесконечно много решений.

Ответ: $a \neq 0$

Найдите все значения параметра a, при которых уравнение $\cos\Big(x - \frac{a}{x}\Big) = x - 1$ имеет бесконечно много решений.

Ответ: $a \neq 0$

Найдите все значения параметра a, при которых уравнение $\cos\Big(x + a\ln|x|\Big) = x - 1$ имеет бесконечно много решений.

Ответ: $a \neq 0$

ОБРАЗЦЫ РЕШЕНИЙ

1. Старший коэффициент квадратного трехчлена $f(x)$ равен 2. Один из его корней равен $5/2$. Найдите второй корень, если известно, что $f(0) = 3$.

Решение: Поскольку $f(0)$ равно свободному члену $f(x)$, по теореме Виета получаем, что произведение корней равно $3/2$. Следовательно, второй корень равен $(3/2)/(5/2) = 3/5$.

Можно рассуждать иначе, без использования теоремы Виета. Из условия следует, что $f(x) = 2x^2 + bx + 3$ с некоторым b. Подставляя $x = 5/2$, получаем: $2(5/2)^2 + b(5/2) + 3 = 0$, откуда находим, что $b = -31/5$. Остается применить формулу корней квадратного уравнения.

Ответ: $3/5$.

2. Вычислите $\log_{12} 3 \cdot \log_9 12$.

Решение: $\log_{12} 3 \cdot \log_9 12 = \log_9 3 = \frac{1}{2}$.

Ответ: $1/2$.

3. Решите неравенство

$$9\Big(1 + 5^{1-2x}\Big)^{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}\Big(5^{2x} + 5\Big)^{\frac{1}{2}} \geqslant 6^{\frac{1}{2}} \cdot 5^{\frac{x}{2}}.$$

Решение: Сделаем замену $t = 5^x$ и поделим обе части неравенства на $\sqrt{t}$, помня, что $t > 0$:

$$\frac{9}{\sqrt{t + \frac{5}{t}}} - \frac{1}{2}\sqrt{t + \frac{5}{t}} \geqslant \sqrt{6}.$$

Сделаем еще одну замену $u = \sqrt{t + \frac{5}{t}}$ и домножим на u, помня, что $u > 0$:

$$u^2 + 2\sqrt{6}u - 18 \leqslant 0.$$

Отсюда получаем, что $-3\sqrt{6} \leqslant u \leqslant \sqrt{6}$ и $u > 0$, то есть

$$0 < t + \frac{5}{t} \leqslant 6.$$

Стало быть, $1 \leqslant t \leqslant 5$, то есть $0 \leqslant x \leqslant 1$.

Ответ: $0 \leqslant x \leqslant 1$.

4. Решите уравнение
$$\frac{\sin 5x}{\sin x} - \frac{\cos 5x}{\cos x} = \frac{\sin x}{\sin 5x} - \frac{\cos x}{\cos 5x}.$$

Решение: Преобразуем левую и правую части уравнения при помощи формул синуса разности и синуса двойного угла:
$$\frac{\sin 4x}{\frac{1}{2}\sin 2x} = \frac{\sin(-4x)}{\frac{1}{2}\sin 10x}.$$
Это равносильно тому, что
$$\frac{\sin 4x(\sin 2x + \sin 10x)}{\sin 2x \sin 10x} = 0.$$
Преобразуем сумму синусов в произведение:
$$\frac{\sin 4x \sin 6x \cos 4x}{\sin 2x \sin 10x} = 0.$$
Еще раз воспользуемся формулой синуса двойного угла:
$$\frac{\sin 8x \sin 6x}{\sin 2x \sin 10x} = 0.$$
Учитывая, что нули функции $\sin 2x$ являются нулями функции $\sin 10x$, получаем:
$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} \sin 6x = 0 \\ \sin 8x = 0 \end{array} \right. \\ \sin 10x \neq 0 \end{cases}$$
Общие нули $\sin 6x$ и $\sin 10x$ имеют вид $\frac{k\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$. Точно так же выглядят общие нули $\sin 8x$ и $\sin 10x$. Следовательно, из серий $\frac{m\pi}{8}$, $\frac{n\pi}{6}$, $m, n \in \mathbb{Z}$, нужно выкинуть числа вида $\frac{k\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$.

Ответ: $x = \frac{m\pi}{8}, \frac{n\pi}{6}, \;\; m \in \mathbb{Z} \backslash 4\mathbb{Z}, \;\; n \in \mathbb{Z} \backslash 3\mathbb{Z}$.

5. В $14:00$ из села Верхнее вниз по течению реки в сторону села Нижнее отправился катер "Быстрый". Когда до Нижнего оставалось плыть 500 метров, ему навстречу из Нижнего вышел катер "Смелый". В этот же самый момент "Быстрый", не желая встречи со "Смелым", развернулся и пошел обратно к Верхнему. В $14:14$, когда расстояние по реке от "Быстрого" до Верхнего сравнялось с расстоянием по реке от "Смелого" до "Быстрого", на "Смелом" осознали, что они идут с "Быстрым" на одинаковой скорости, развернулись и направились обратно к Нижнему. В исходные пункты катера вернулись одновременно в $14:18$. Найдите расстояние по реке между Верхним и Нижним, если известно, что оба катера движутся равномерно и с одинаковой собственной скоростью.

Решение: В момент выхода "Смелого" из села Нижнее расстояние между катерами составляло 500 м. Так как против течения реки они двигались с постоянной скоростью, то и в момент, когда "Смелый", развернувшись, двинулся назад в сторону Нижнего, расстояние между "Смелым" и "Быстрым" составляло 500 м. Согласно условию в этот момент расстояние по реке от "Быстрого" до села Верхнее также составляло 500 метров. Эти последние

500 метров пути катер "Быстрый" проплыл за 4 минуты, двигаясь против течения. Следовательно, его скорость относительно берега при движении против течения реки равна $500/4 = 125$ м/мин.

Пусть S метров — расстояние между селами Верхнее и Нижнее и v м/мин. — скорость катеров относительно берега при движении по течению реки. Ясно, что $v > 125$.

Из сказанного выше следует, что в момент разворота катера "Смелый" расстояние по реке от него до села Верхнее равнялось 1000 метров, а длина обратного пути "Смелого" до села Нижнее равнялась $S - 1000$ метров. "Смелый" проплыл этот путь по течению реки за 4 минуты, поэтому $S - 1000 = 4v$ или $S = 4v + 1000$ метров.

По условию катер "Быстрый" до разворота проплыл $S - 500$ метров, затратив на весь свой путь 18 минут. Поэтому

$$\frac{S-500}{125} + \frac{S-500}{v} = 18.$$

Подставляя в это равенство $1000 + 4v$ вместо S и обозначая для краткости $x = \dfrac{v}{125}$, приходим к уравнению

$$2x + \frac{2}{x} = 5.$$

Решая это уравнение, находим корни $x_1 = 2$, $x_2 = 1/2$. Учитывая, что $x > 1$, получаем: $x = 2$, $v = 250$ и $S = 2000$. Стало быть, искомое расстояние равно 2 км.

Ответ: 2 км.

6. Трапеция $ABCD$ вписана в окружность радиуса R и описана около окружности радиуса r. Найдите r, если $R = 12$, а косинус угла между диагональю AC и основанием AD равен $3/4$.

Решение: Из того, что трапеция вписана, следует, что она равнобокая. Положим $AB = CD = a$, $BC = b$, $AD = c$. Не ограничивая общности, можно считать, что $c \geqslant b$. Из того, что трапеция описана, следует, что $b + c = 2a$. Опустим перпендикуляр CH на сторону AD. Тогда $CH = 2r$, $AH = \frac{c}{2} + \frac{b}{2} = a$ (поскольку точки касания окружности делят основания пополам). Следовательно, обозначив $\varphi = \angle CAD$, получаем:

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{2r}{a}. \qquad (1)$$

С другой стороны, по теореме синусов, примененной к треугольнику CAD,

$$\sin\varphi = \frac{a}{2R}. \qquad (2)$$

Перемножая (1) и (2), находим:

$$\frac{r}{R} = \frac{1}{\cos\varphi} - \cos\varphi.$$

Подставляя $R = 12$, $\cos\varphi = 3/4$, получаем $r = 7$.

Замечание: В других вариантах полезно заметить, что средняя линия трапеции равна AH и, стало быть, $\cos\varphi$ равен отношению средней линии к диагонали.

Ответ: 7.

7. В основании прямой призмы $ABCA'B'C'$ лежит прямоугольный треугольник ABC, такой что $AC = BC = 1$. На ребре $A'B'$ верхнего основания (параллельном AB) отмечена точка D, так что $A'D : DB' = 1 : 2$. Найдите радиус сферы, вписанной в тетраэдр $ABC'D$, если высота призмы равна 1.

Решение: Обозначим объем тетраэдра $ABC'D$, площадь его поверхности и радиус вписанной в него сферы, соответственно, как V, S, r. Тогда $V = \frac{1}{3}rS$. Объем тетраэдра $ABC'D$ равен объему тетраэдра $ABCD$, поскольку $CC' \parallel AA'$. Стало быть, $V = 1/6$ и

$$r = (2S)^{-1}.$$

Найдем S. Обозначим площади граней тетраэдра $ABC'D$ стандартным образом через S_{ABD}, $S_{ABC'}$, $S_{ADC'}$, $S_{BDC'}$. Площади треугольников ABD и ABA' равны, стало быть, $S_{ABD} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, так как $AB = \sqrt{2}$. Высота треугольника ABC', опущенная из вершины C', равна $\sqrt{\frac{3}{2}}$, следовательно, $S_{ABC'} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Чтобы найти $S_{ADC'}$, обозначим через λ отношение $A'D$ к $A'B'$. По условию $\lambda = 1/3$. Найдем косинус угла φ между нормалью к плоскости ADC' и прямой AA'. Проведем через точку A' прямую, параллельную $C'B'$, и обозначим точку пересечения этой прямой с прямой $C'D$ через E. Поскольку треугольники $A'DE$ и $B'DC'$ подобны и $A'D : DB' = \lambda : 1-\lambda$, получаем, что $A'E = \frac{\lambda}{1-\lambda}$. Стало быть, в системе координат с началом в точке A' и осями $A'A$, $A'C'$, $A'E$ вектор нормали к плоскости ADC' может быть записан как $(1, 1, \frac{1-\lambda}{\lambda})$. Вектор же $A'A$ имеет вид $(1, 0, 0)$. Следовательно,

$$\cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{3 - \frac{2}{\lambda} + \frac{1}{\lambda^2}}} = \frac{\lambda}{\sqrt{3\lambda^2 - 2\lambda + 1}}.$$

Площадь треугольника $A'DC'$ относится к площади треугольника $A'B'C'$, как λ, то есть она равна $\frac{\lambda}{2}$. Стало быть,

$$S_{ADC'} = \frac{\lambda}{2\cos\varphi} = \frac{1}{2}\sqrt{3\lambda^2 - 2\lambda + 1} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{3}}.$$

Заметим, что из соображений симметрии $S_{BDC'}$ получается из $S_{ADC'}$ заменой λ на $1-\lambda$, то есть

$$S_{BDC'} = \frac{1}{2}\sqrt{3(1-\lambda)^2 - 2(1-\lambda) + 1} = \frac{1}{2}.$$

Итак,

$$S = S_{ABD} + S_{ABC'} + S_{ADC'} + S_{BDC'} = \frac{1}{2}\left(1 + \sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{\tfrac{2}{3}}\right).$$

Остается воспользоваться соотношением $r = (2S)^{-1}$.

Ответ: $\left(1 + \sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{\frac{2}{3}}\right)^{-1}$.

8. Найдите все значения параметра a, при которых уравнение

$$\sin\left(x + \frac{a}{x}\right) = x + 1$$

имеет бесконечно много решений.

Решение: Перепишем данное уравнение в виде системы

$$\begin{cases} t = x + \dfrac{a}{x} \\ \sin t = x + 1. \end{cases} \tag{3}$$

Исключая из этой системы переменную x, получаем еще одно уравнение

$$t = \sin t - 1 + \frac{a}{\sin t - 1}. \tag{4}$$

Существует взаимно однозначное соответствие между решениями уравнения (4) и решениями системы (3). Точно так же каждому решению системы (3) соответствует единственное решение данного в условии задачи уравнения и наоборот, каждому решению данного уравнения соответствует единственное решение системы (3). Таким образом, множество решений данного уравнения будет бесконечным в том и только том случае, когда бесконечно множество решений уравнения (4). Это уравнение можно переписать в виде

$$t + 1 - \sin t - \frac{a}{\sin t - 1} = 0. \tag{5}$$

Рассмотрим функцию $f(t) = t + 1 - \sin t$. Она определена и непрерывна на всей числовой прямой. Ее производная $f'(t) = 1 - \cos t$ неотрицательна и обращается в нуль в точках вида $2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$. Отсюда следует, что $f(t)$ монотонно возрастает на каждом отрезке $[2\pi n, 2\pi(n+1)]$, $n \in \mathbb{Z}$, и, значит, $f(t)$ монотонно возрастает на всей числовой прямой. Из неравенств $t \le f(t) \le t + 2$ следует, что множество значений этой функции составляет всю числовую прямую.

Пусть $a = 0$. Тогда уравнение (5) принимает вид $f(t) = 0$. Учитывая монотонность функции $f(t)$ и тот факт, что множество ее значений совпадает с числовой прямой, заключаем, что уравнение (5) имеет единственное решение. Значит, $a = 0$ не удовлетворяет условию задачи.

Пусть $a < 0$. На промежутке $\left[\frac{\pi}{2} + 2\pi k\,, \frac{3\pi}{2} + 2\pi k\right]$ при любом целом k функция $\sin t$ монотонно убывает от 1 до -1. Поэтому функция $\dfrac{1}{\sin t - 1}$ на том же промежутке возрастает от $-\infty$ до $-\frac{1}{2}$, а функция $-\dfrac{a}{\sin t - 1}$ монотонно возрастает от $-\infty$ до $\dfrac{a}{2}$. Являясь суммой двух возрастающих функций, левая часть уравнения (5) также возрастает на отрезке $\left[\frac{\pi}{2} + 2\pi k\,, \frac{3\pi}{2} + 2\pi k\right]$ от $-\infty$ до $\dfrac{3\pi}{2} + 2\pi k + 2 + \dfrac{a}{2}$. Значит, при любом целом $k > \dfrac{|a|}{4\pi}$ левая часть уравнения (5) принимает на интервале $\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi k\,, \frac{3\pi}{2} + 2\pi k\right)$ как отрицательные, так и положительные значения. Поскольку она непрерывна на этом интервале, заключаем, что в какой-то из точек этого интервала она обращается в нуль, т.е. на этом интервале уравнение (5) имеет решение. Но тогда множества решений уравнения (5) и данного уравнения бесконечны.

Пусть $a > 0$. В этом случае рассуждения проходят так же как и в предыдущем. На промежутке $\left[-\frac{\pi}{2} + 2\pi k\,, \frac{\pi}{2} + 2\pi k\right]$ при любом целом k функция $\sin t$ монотонно возрастает от -1 до 1. Поэтому функция $\dfrac{1}{\sin t - 1}$ на том же промежутке убывает от $-\dfrac{1}{2}$ до $-\infty$, а функция $-\dfrac{a}{\sin t - 1}$ монотонно возрастает от $\dfrac{a}{2}$ до ∞. Являясь суммой двух возрастающих функций, левая часть уравнения (5) также возрастает на отрезке $\left[-\frac{\pi}{2} + 2\pi k\,, \frac{\pi}{2} + 2\pi k\right]$ от

$\dfrac{-\pi}{2} + 2\pi k + 2 + \dfrac{a}{2}$ до ∞. Значит, при любом целом $k < -\dfrac{a}{4\pi} - \dfrac{1}{\pi}$ левая часть уравнения (5) принимает на интервале $\left(-\dfrac{\pi}{2} + 2\pi k, \dfrac{\pi}{2} + 2\pi k\right)$ как отрицательные, так и положительные значения. Поскольку она непрерывна на этом интервале, заключаем, что в какой-то из точек этого интервала она обращается в нуль, т.е. на этом интервале уравнение (5) имеет решение. Но тогда множества решений уравнения (5) и данного уравнения бесконечны.

Замечание: Предполагается, что соображениями непрерывности и теоремой о промежуточном значении непрерывной функции можно пользоваться без доказательства.

Ответ: $a \neq 0$.